# DINÁMICA EN LA NATURALEZA: EL MOVIMIENTO

00 Dinamica Preliminares.indd 1 10/1/12 11:27 PM

# DINÁMICA EN LA NATURALEZA: EL MOVIMIENTO

Vivir Mejor

Fomentar la lectura
mejora la educación y la cultura

GOBIERNO FEDERAL

SEP

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS

**Secretaría de Educación Pública**
José Ángel Córdova Villalobos

**Subsecretaría de Educación Media Superior**
Miguel Ángel Martínez Espinosa

**Dirección General del Bachillerato**
Carlos Santos Ancira

**Autor**
Daniel Cruz Vázquez

**Apoyo técnico pedagógico**
María de Lourdes Ortiz Díaz

**Revisión pedagógica**
Araceli Hernández Cervantes

**Revisión técnico-pedagógica de la Dirección General del Bachillerato**
Elka Méndez de la Brena

**Coordinación y servicios editoriales**
Edere S. A. de C. V.
José Ángel Quintanilla D'Acosta
Mónica Lobatón Díaz

**Diseño y diagramación**
Visión Tipográfica Editores, S.A. de C.V.

**Material fotográfico e iconografía**
Shutterstock Images, LLC
Martín Córdova Salinas
Isabel Gómez Caravantes

Primera edición, 2012

Argentina 28, Centro,
06020, México, D. F.

ISBN

Impreso en México

# Tabla de contenido

# Presentación general

Este libro fue elaborado para apoyarte en el estudiar del módulo *Dinámica en la naturaleza: El movimiento* del plan de estudios de la Preparatoria Abierta que ha establecido la Secretaría de Educación Pública (SEP), pero también está diseñado para utilizarse en otras modalidades no escolarizadas y mixtas. Sabiendo que trabajarás de manera independiente la mayor parte del tiempo este libro te brinda orientaciones muy precisas sobre lo que habrás de hacer y te proporciona la información que requieres para aprender.

Los estudios que iniciarás tienen como sustento en un enfoque de educación por competencias, por lo que se busca que trabajes en adquirir nuevos conocimientos, habilidades, actitudes y valores, así como en recuperar otros para transformarlos en capacidad para desempeñarte de forma eficaz y eficiente en diferentes ámbitos de tu vida personal, profesional y laboral.

Para facilitar tu estudio es importante que tengas muy claro lo qué implica aprender competencias, cómo se recomienda estudiar en una modalidad no escolarizada y cómo utilizar este libro.

## ¿Qué es una competencia?

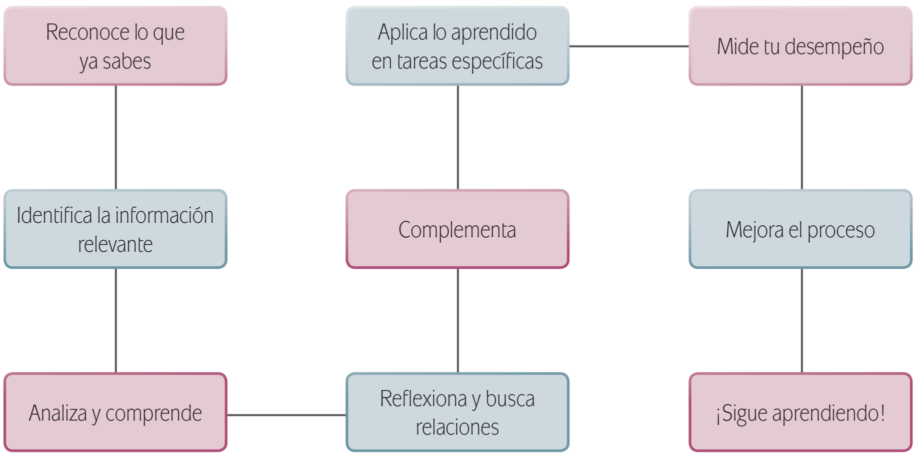
En el contexto educativo, hablar de “competencias” no es hacer referencia a una contienda o a una justa deportiva. El Acuerdo 442 de la Secretaría de Educación Pública define **competencia** como la integración de habilidades, conocimientos, actitudes y valores en un contexto específico.

La meta de la formación como bachiller es que tú desarrolles las competencias que han sido definidas por la SEP como perfil de egreso para la Educación Media Superior.[1] No se pretende que te dediques a memorizar información o que demuestres habilidades aisladas. El objetivo es que logres aplicar de manera efectiva tus conocimientos, habilidades, actitudes y valores en situaciones o problemas concretos.

La cantidad de información disponible en la época actual nos impulsa a buscar formas diferentes de aprender, ya que memorizar contenidos resulta insuficiente. Ahora se requiere que aprendas a analizar la información y te apropies de los conocimientos haciéndolos útiles para ti y tu entorno.

Por eso cuando estudies, orienta tus esfuerzos a identificar los conceptos más importantes, a analizarlos con detenimiento para comprenderlos y reflexionar sobre cómo se relacionan con otros términos. Busca información adicional. Pero no te quedes allí aprende cómo aplicar los saberes en situaciones y contextos propuestos en las actividades. Haz lo mismo con las habilidades, las actitudes y los valores. De manera concreta, es recomendable que para aprender sigas estos pasos:

[1] De acuerdo con el Marco Curricular Común, el estudiante de bachillerato deberá desarrollar tres tipos de competencias: genéricas, disciplinares y profesionales.




En este libro además de leer y estudiar textos y procedimientos, encontrarás problemas a resolver, casos para analizar y proyectos a ejecutar. Éstos te ofrecerán evidencias sobre las capacidades que desarrollarás y podrás valorar tus avances.

Para acreditar el módulo *Dinámica en la naturaleza: El movimiento* es básico que demuestres que eres capaz de analizar y resolver situaciones, problemas y casos que te exigen la articulación de conocimientos, habilidades, actitudes y valores.

## Estudiar en una modalidad no escolarizada

Una modalidad educativa no escolarizada como la que estás cursando tiene como ventaja una gran flexibilidad. Tú decides a qué hora y dónde estudias, y qué tan rápido avanzas. Puedes adecuar tus horarios a otras responsabilidades cotidianas que tienes que cubrir como el trabajo, la familia o cualquier proyecto personal.

En esta modalidad educativa, se requiere que:

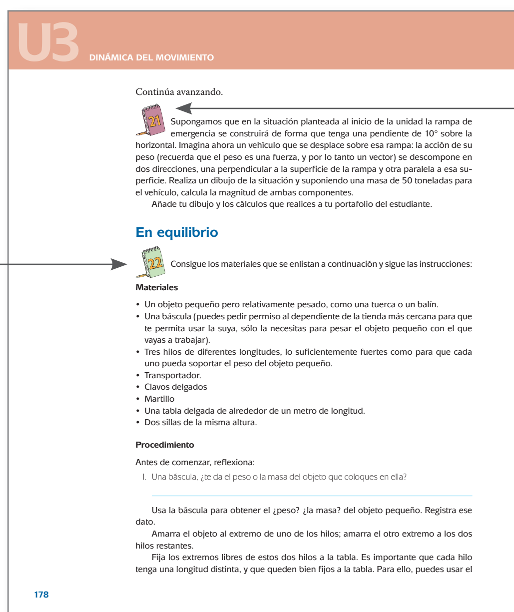
- Seas capaz de dirigir tu proceso de aprendizaje. Es decir que:
    - Definas tus metas personales de aprendizaje, considerando el propósito formativo de los módulos.
    - Asignes tiempo para el estudio y procures contar con el espacio adecuado y los recursos necesarios.
    - Regules tu ritmo de avance.
    - Aproveches los materiales que la SEP ha preparado para apoyarte.
    - Utilices otros recursos que puedan ayudarte a profundizar tu aprendizaje.
    - Identifiques tus dificultades para aprender y busques ayuda para superarlas.

- Te involucres de manera activa en tu aprendizaje. Es decir que:
  - Leas para comprender las ideas presentes y construyas significados.
  - Recurras a tu experiencia como punto de partida para aprender.
  - Realices las actividades propuestas y revises los productos que generes.
  - Reconozcas tus fortalezas y debilidades como estudiante.
  - Selecciones las técnicas de estudio que mejor funcionen para ti.
  - Emprendas acciones para enriquecer tus capacidades para aprender y subsanar tus limitaciones.
- Asumas una postura crítica y propositiva. Es decir que:
  - Analices de manera crítica los conceptos que se presentan.
  - Indagues sobre los temas que estudias y explores distintos planteamientos en torno a ellos.
  - Plantees alternativas de solución a los problemas.
  - Explores formas diversas de enfrentar las situaciones.
  - Adoptes una postura personal en los distintos debates.
- Seas honesto(a) y te comprometas contigo mismo(a). Es decir que:
  - Realices tú mismo(a) las actividades.
  - Consultes las respuestas después de haber llevado a cabo las actividades.
  - Busques asesoría en los Centros de Servicios de Preparatoria Abierta.
  - Destines el tiempo de estudio necesario para lograr los resultados de aprendizaje.
- Evalúes tus logros de manera constante. Es decir que:
  - Analices tu ejecución de las actividades y los productos que generes utilizando la retroalimentación que se ofrece en el libro.
  - Identifiques los aprendizajes que alcances utilizando los referentes que te ofrece el material.
  - Reconozcas las limitaciones en tu aprendizaje y emprendas acciones para superarlas.
  - Aproveches tus errores como una oportunidad para aprender.
- Reflexiones sobre tu propio proceso de aprendizaje. Es decir que:
  - Te preguntes de manera constante: ¿Qué estoy haciendo bien?, ¿qué es lo que no me ha funcionado?
  - Realices ajustes en tus estrategias para mejorar tus resultados de aprendizaje.
  - Como puedes ver, el estudio independiente es una tarea que implica el desarrollo de muchas habilidades que adquirirás y mejorarás a medida que avances en tus estudios. La componente principal es que estés comprometido con tu aprendizaje.

# Cómo utilizar este material

Este libro te brinda los elementos fundamentales para apoyarte en tu aprendizaje. Lo constituyen diversas secciones en las que se te proponen los pasos que es recomendable que sigas para estudiar.

1. En la sección *Tu plan de trabajo* encontrarás el propósito general del módulo, las competencias que deberás desarrollar y una explicación general de las unidades. Es importante que sea lo primero que leas del libro para definir tu plan personal de trabajo.
2. En la sección *¿Con qué saberes cuento?* se presenta una evaluación con la que puedes valorar si posees los saberes requeridos para estudiar con éxito el módulo. Es oportuno que identifiques desde el inicio si necesitas aprender o fortalecer algún conocimiento o habilidad antes de comenzar.
3. Después de la sección anterior se presentan, las unidades en el orden sugerido para su estudio. Cada una de ellas contiene actividades de aprendizaje e información necesaria para realizarlas;



U3 DINÁMICA DEL MOVIMIENTO

Continúa avanzando.

21 Supongamos que en la situación planteada al inicio de la unidad la rampa de emergencia se construirá de forma que tenga una pendiente de 10° sobre la horizontal. Imagina ahora un vehículo que se desplace sobre esa rampa: la acción de su peso (recuerda que el peso es una fuerza, y por lo tanto un vector) se descompone en dos direcciones, una perpendicular a la superficie de la rampa y otra paralela a esa superficie. Realiza un dibujo de la situación y suponiendo una masa de 50 toneladas para el vehículo, calcula la magnitud de ambas componentes.

Añade tu dibujo y los cálculos que realices a tu portafolio del estudiante.

**En equilibrio**

22 Consigue los materiales que se enlistan a continuación y sigue las instrucciones:

**Materiales**

- Un objeto pequeño pero relativamente pesado, como una tuerca o un balín.
- Una báscula (puedes pedir permiso al dependiente de la tienda más cercana para que te permita usar la suya, sólo la necesitas para pesar el objeto pequeño con el que vayas a trabajar).
- Tres hilos de diferentes longitudes, lo suficientemente fuertes como para que cada uno pueda soportar el peso del objeto pequeño.
- Transportador.
- Clavos delgados
- Martillo
- Una tabla delgada de alrededor de un metro de longitud.
- Dos sillas de la misma altura.

**Procedimiento**

Antes de comenzar, reflexiona:

I. Una báscula, ¿te da el peso o la masa del objeto que coloques en ella?

Usa la báscula para obtener el ¿peso? ¿la masa? del objeto pequeño. Registra ese dato.

Amarra el objeto al extremo de uno de los hilos; amarra el otro extremo a los dos hilos restantes.

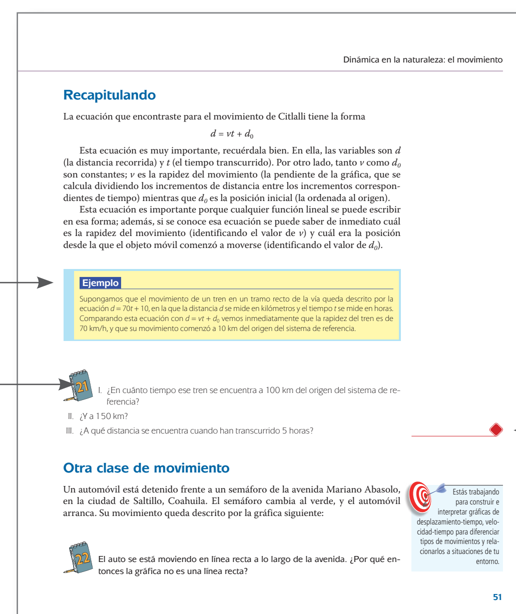
Fija los extremos libres de estos dos hilos a la tabla. Es importante que cada hilo tenga una longitud distinta, y que queden bien fijos a la tabla. Para ello, puedes usar el

178

**Actividad experimental** Actividades que refuerzan el carácter experimental del módulo, donde tendrás oportunidad de reforzar los conocimientos teóricos con la elaboración de algunas prácticas.

**Actividad de seguimiento** Actividades graduadas para dar continuidad a una problemática que recorre toda la unidad dándole aplicación a los conocimientos que vas adquiriendo.

**Alto** Te sugiere dónde detenerte sin dejar un proceso de aprendizaje incompleto.



Dinámica en la naturaleza: el movimiento

**Recapitulando**

La ecuación que encontraste para el movimiento de Citlalli tiene la forma

$$d = vt + d_0$$

Esta ecuación es muy importante, recuérdala bien. En ella, las variables son $d$ (la distancia recorrida) y $t$ (el tiempo transcurrido). Por otro lado, tanto $v$ como $d_0$ son constantes; $v$ es la rapidez del movimiento (la pendiente de la gráfica, que se calcula dividiendo los incrementos de distancia entre los incrementos correspondientes de tiempo) mientras que $d_0$ es la posición inicial (la ordenada al origen).

Esta ecuación es importante porque cualquier función lineal se puede escribir en esa forma; además, si se conoce esa ecuación se puede saber de inmediato cuál es la rapidez del movimiento (identificando el valor de $v$) y cuál era la posición desde la que el objeto móvil comenzó a moverse (identificando el valor de $d_0$).

**Ejemplo**

Supongamos que el movimiento de un tren en un tramo recto de la vía queda descrito por la ecuación $d = 70t + 10$, en la que la distancia $d$ se mide en kilómetros y el tiempo $t$ se mide en horas. Comparando esta ecuación con $d = vt + d_0$ vemos inmediatamente que la rapidez del tren es de 70 km/h, y que su movimiento comenzó a 10 km del origen del sistema de referencia.

21 I. ¿En cuánto tiempo ese tren se encuentra a 100 km del origen del sistema de referencia?

II. ¿Y a 150 km?

III. ¿A qué distancia se encuentra cuando han transcurrido 5 horas?

**Otra clase de movimiento**

Un automóvil está detenido frente a un semáforo de la avenida Mariano Abasolo, en la ciudad de Saltillo, Coahuila. El semáforo cambia al verde, y el automóvil arranca. Su movimiento queda descrito por la gráfica siguiente:

Estás trabajando para construir e interpretar gráficas de desplazamiento-tiempo, velocidad-tiempo para diferenciar tipos de movimientos y relacionarlos a situaciones de tu entorno.

22 El auto se está moviendo en línea recta a lo largo de la avenida. ¿Por qué entonces la gráfica no es una línea recta?

51

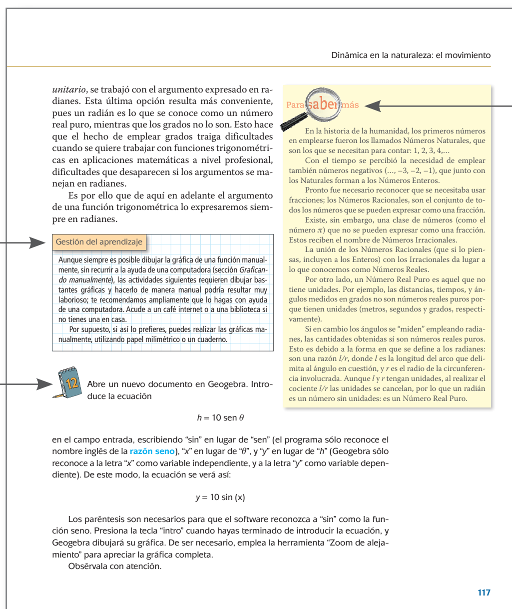
**Actividades** Encontrarás una diversidad de actividades que te ayudarán a desarrollar competencias, las identificarás siempre que aparezca una libreta. De acuerdo con el tipo de actividad el color de dicha libreta cambia; las actividades de aprendizaje las encontrarás en color azul, las de seguimiento en rojo y las experimentales en verde.

**Ejemplo** Te ofrece una opción más de reforzar el tema estudiado, mediante ejemplos concretos.

sin embargo se te sugerirá de manera continua que consultes fuentes adicionales a este libro.

4. Para que puedas evaluar los productos que realices está el primer apéndice del libro. En él encontrarás la clave de respuestas a las actividades. No dejes de consultarlo después de haberlas realizado.
5. También encontrarás una sección de evaluación final del módulo. Su resolución te permitirá valorar si ya lograste los aprendizajes propuestos y si estás en condiciones de presentar tu examen para acreditar el módulo en la SEP. Es muy importante que califiques honestamente tus respuestas y una vez que tengas los resultados pienses sobre lo que sí te funcionó y lo que no a lo largo del estudio, para que adoptes mejoras para tu proceso de aprendizaje.

Con frecuencia se te recomienda buscar información en Internet, o acceder a algunas páginas electrónicas, pero no te limites a dichas recomendaciones, busca otras; en ocasiones, dada la velocidad con que se actualiza la información en Internet, encontrarás algunas que ya no están disponibles, por


Dinámica en la naturaleza: el movimiento

*unitario*, se trabajó con el argumento expresado en radianes. Esta última opción resulta más conveniente, pues un radián es lo que se conoce como un número real puro, mientras que los grados no lo son. Esto hace que el hecho de emplear grados traiga dificultades cuando se quiere trabajar con funciones trigonométricas en aplicaciones matemáticas a nivel profesional, dificultades que desaparecen si los argumentos se manejan en radianes.

Es por ello que de aquí en adelante el argumento de una función trigonométrica lo expresaremos siempre en radianes.

Gestión del aprendizaje

Aunque siempre es posible dibujar la gráfica de una función manualmente, sin recurrir a la ayuda de una computadora (sección *Graficando manualmente*), las actividades siguientes requieren dibujar bastantes gráficas y hacerlo de manera manual podría resultar muy laborioso; te recomendamos ampliamente que lo hagas con ayuda de una computadora. Acude a un café internet o a una biblioteca si no tienes una en casa.

Por supuesto, si así lo prefieres, puedes realizar las gráficas manualmente, utilizando papel milimétrico o un cuaderno.

Para saber más

En la historia de la humanidad, los primeros números en emplearse fueron los llamados Números Naturales, que son los que se necesitan para contar: 1, 2, 3, 4,...

Con el tiempo se percibió la necesidad de emplear también números negativos (..., −3, −2, −1), que junto con los Naturales forman a los Números Enteros.

Pronto fue necesario reconocer que se necesitaba usar fracciones; los Números Racionales, son el conjunto de todos los números que se pueden expresar como una fracción.

Existe, sin embargo, una clase de números (como el número $\pi$) que no se pueden expresar como una fracción. Estos reciben el nombre de Números Irracionales.

La unión de los Números Racionales (que si lo piensas, incluyen a los Enteros) con los Irracionales da lugar a lo que conocemos como Números Reales.

Por otro lado, un Número Real Puro es aquel que no tiene unidades. Por ejemplo, las distancias, tiempos, y ángulos medidos en grados no son números reales puros porque tienen unidades (metros, segundos y grados, respectivamente).

Si en cambio los ángulos se "miden" empleando radianes, las cantidades obtenidas sí son números reales puros. Esto es debido a la forma en que se define a los radianes: son una razón $l/r$, donde $l$ es la longitud del arco que delimita al ángulo en cuestión, y $r$ es el radio de la circunferencia involucrada. Aunque $l$ y $r$ tengan unidades, al realizar el cociente $l/r$ las unidades se cancelan, por lo que un radián es un número sin unidades: es un Número Real Puro.

12 Abre un nuevo documento en Geogebra. Introduce la ecuación

$$h = 10 \text{ sen } \theta$$

en el campo entrada, escribiendo "sin" en lugar de "sen" (el programa sólo reconoce el nombre inglés de la **razón seno**), "$x$" en lugar de "$\theta$", y "$y$" en lugar de "$h$" (Geogebra sólo reconoce a la letra "$x$" como variable independiente, y a la letra "$y$" como variable dependiente). De este modo, la ecuación se verá así:

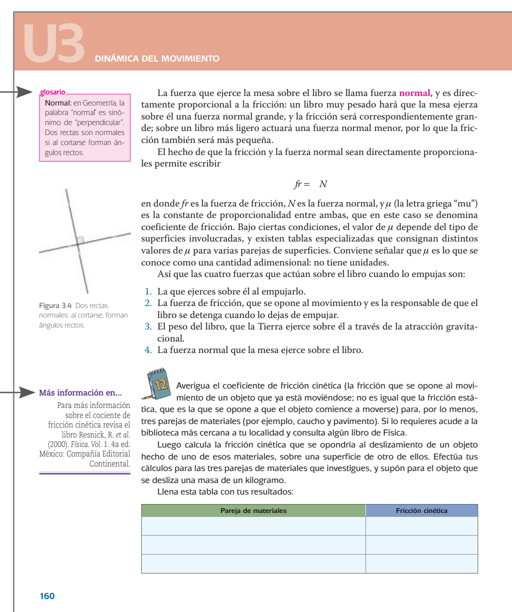
$$y = 10 \sin (x)$$

Los paréntesis son necesarios para que el software reconozca a "sin" como la función seno. Presiona la tecla "intro" cuando hayas terminado de introducir la ecuación, y Geogebra dibujará su gráfica. De ser necesario, emplea la herramienta "Zoom de alejamiento" para apreciar la gráfica completa.

Obsérvala con atención.

117

**Para saber más** Brinda información interesante, curiosa o novedosa sobre el tema que se está trabajando y que no es esencial, sino complementaria.


U3 DINÁMICA DEL MOVIMIENTO

glosario

Normal: en Geometría, la palabra "normal" es sinónimo de "perpendicular". Dos rectas son normales si al cortarse forman ángulos rectos.

La fuerza que ejerce la mesa sobre el libro se llama fuerza **normal**, y es directamente proporcional a la fricción: un libro muy pesado hará que la mesa ejerza sobre él una fuerza normal grande, y la fricción será correspondientemente grande; sobre un libro más ligero actuará una fuerza normal menor, por lo que la fricción también será más pequeña.

El hecho de que la fricción y la fuerza normal sean directamente proporcionales permite escribir

$$fr = \quad N$$

en donde $fr$ es la fuerza de fricción, $N$ es la fuerza normal, y $\mu$ (la letra griega "mu") es la constante de proporcionalidad entre ambas, que en este caso se denomina coeficiente de fricción. Bajo ciertas condiciones, el valor de $\mu$ depende del tipo de superficies involucradas, y existen tablas especializadas que consignan distintos valores de $\mu$ para varias parejas de superficies. Conviene señalar que $\mu$ es lo que se conoce como una cantidad adimensional: no tiene unidades.

Así que las cuatro fuerzas que actúan sobre el libro cuando lo empujas son:

1. La que ejerces sobre él al empujarlo.
2. La fuerza de fricción, que se opone al movimiento y es la responsable de que el libro se detenga cuando lo dejas de empujar.
3. El peso del libro, que la Tierra ejerce sobre él a través de la atracción gravitacional.
4. La fuerza normal que la mesa ejerce sobre el libro.

Figura 3.4 Dos rectas normales: al cortarse, forman ángulos rectos.

Más información en...

Para más información sobre el cociente de fricción cinética revisa el libro Resnick, R. *et al.* (2000). *Física*. Vol. 1. 4a ed. México: Compañía Editorial Continental.

12 Averigua el coeficiente de fricción cinética (la fricción que se opone al movimiento de un objeto que ya está moviéndose; no es igual que la fricción estática, que es la que se opone a que el objeto comience a moverse) para, por lo menos, tres parejas de materiales (por ejemplo, caucho y pavimento). Si lo requieres acude a la biblioteca más cercana a tu localidad y consulta algún libro de Física.

Luego calcula la fricción cinética que se opondría al deslizamiento de un objeto hecho de uno de esos materiales, sobre una superficie de otro de ellos. Efectúa tus cálculos para las tres parejas de materiales que investigues, y supón para el objeto que se desliza una masa de un kilogramo.

Llena esta tabla con tus resultados:

| Pareja de materiales | Fricción cinética |
|---|---|
| | |
| | |
| | |

160

**Actividad** Encontrarás una diversidad de actividades que te ayudarán a desarrollar competencias, como son: actividades de aprendizaje, actividades de seguimiento y actividades experimentales. Lee las instrucciones con atención y llévalas a cabo, serán tu guía en el módulo.

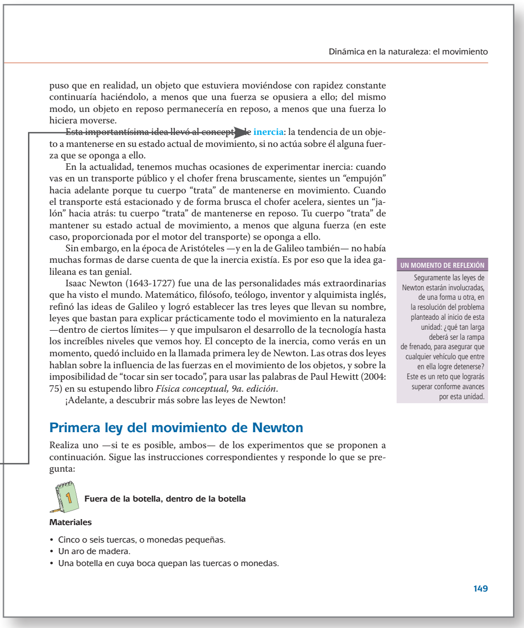
**Gestión del aprendizaje** Ofrece información que te orienta para alcanzar tus metas de estudio. En ella puedes tener explicaciones de carácter teórico, sobre estrategias de aprendizaje y sobre técnicas de estudio.

**Mas información en...** En esta sección encontrarás sugerencias de direcciones electrónicas y títulos de libros complementarios, en soporte impreso o digital, a los que puedes recurrir para ampliar tus conocimientos.

**Glosario** Resalta aquellos términos que pueden ser desconocidos o de difícil comprensión. En el margen encontrarás la definición correspondiente lo que saber buscar (navegar) te será muy útil. Si tienes alguna duda sobre cómo hacerlo, consulta el Apéndice 2 “La consulta en fuentes de información en Internet”.

A lo largo del texto encontrarás una serie de elementos gráficos que te ayudarán en la gestión de tu aprendizaje.

Conforme avances identificarás cuáles de estos recursos te resultan más útiles según tus capacidades y habilidades para aprender y tu estilo de aprendizaje. ¡Aprovéchalos para sacar el mayor beneficio de este libro!



Dinámica en la naturaleza: el movimiento

puso que en realidad, un objeto que estuviera moviéndose con rapidez constante continuaría haciéndolo, a menos que una fuerza se opusiera a ello; del mismo modo, un objeto en reposo permanecería en reposo, a menos que una fuerza lo hiciera moverse.

Esta importantísima idea llevó al concepto de **inercia**: la tendencia de un objeto a mantenerse en su estado actual de movimiento, si no actúa sobre él alguna fuerza que se oponga a ello.

En la actualidad, tenemos muchas ocasiones de experimentar inercia: cuando vas en un transporte público y el chofer frena bruscamente, sientes un “empujón” hacia adelante porque tu cuerpo “trata” de mantenerse en movimiento. Cuando el transporte está estacionado y de forma brusca el chofer acelera, sientes un “jalón” hacia atrás: tu cuerpo “trata” de mantenerse en reposo. Tu cuerpo “trata” de mantener su estado actual de movimiento, a menos que alguna fuerza (en este caso, proporcionada por el motor del transporte) se oponga a ello.

Sin embargo, en la época de Aristóteles —y en la de Galileo también— no había muchas formas de darse cuenta de que la inercia existía. Es por eso que la idea galileana es tan genial.

Isaac Newton (1643-1727) fue una de las personalidades más extraordinarias que ha visto el mundo. Matemático, filósofo, teólogo, inventor y alquimista inglés, refinó las ideas de Galileo y logró establecer las tres leyes que llevan su nombre, leyes que bastan para explicar prácticamente todo el movimiento en la naturaleza —dentro de ciertos límites— y que impulsaron el desarrollo de la tecnología hasta los increíbles niveles que vemos hoy. El concepto de la inercia, como verás en un momento, quedó incluido en la llamada primera ley de Newton. Las otras dos leyes hablan sobre la influencia de las fuerzas en el movimiento de los objetos, y sobre la imposibilidad de “tocar sin ser tocado”, para usar las palabras de Paul Hewitt (2004: 75) en su estupendo libro *Física conceptual, 9a. edición*.

¡Adelante, a descubrir más sobre las leyes de Newton!

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

Seguramente las leyes de Newton estarán involucradas, de una forma u otra, en la resolución del problema planteado al inicio de esta unidad: ¿qué tan larga deberá ser la rampa de frenado, para asegurar que cualquier vehículo que entre en ella logre detenerse? Este es un reto que lograrás superar conforme avances por esta unidad.

Primera ley del movimiento de Newton

Realiza uno —si te es posible, ambos— de los experimentos que se proponen a continuación. Sigue las instrucciones correspondientes y responde lo que se pregunta:

1 Fuera de la botella, dentro de la botella

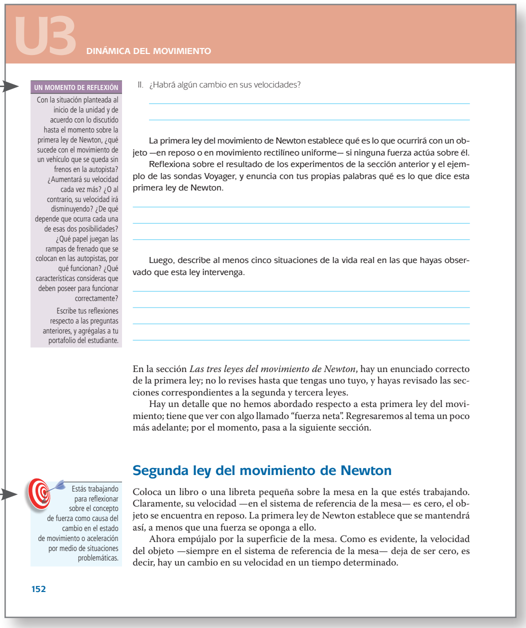
Materiales

- Cinco o seis tuercas, o monedas pequeñas.
- Un aro de madera.
- Una botella en cuya boca quepan las tuercas o monedas.

149

**Concepto clave**

A lo largo del libro se resaltan con azul los términos esenciales para la comprensión de la situación o el tema que estás analizando.



U3 DINÁMICA DEL MOVIMIENTO

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

Con la situación planteada al inicio de la unidad y de acuerdo con lo discutido hasta el momento sobre la primera ley de Newton, ¿qué sucede con el movimiento de un vehículo que se queda sin frenos en la autopista? ¿Aumentará su velocidad cada vez más? ¿O al contrario, su velocidad irá disminuyendo? ¿De qué depende que ocurra cada una de esas dos posibilidades? ¿Qué papel juegan las rampas de frenado que se colocan en las autopistas, por qué funcionan? ¿Qué características consideras que deben poseer para funcionar correctamente?

Escribe tus reflexiones respecto a las preguntas anteriores, y agrégalas a tu portafolio del estudiante.

II. ¿Habrá algún cambio en sus velocidades?

La primera ley del movimiento de Newton establece qué es lo que ocurrirá con un objeto —en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme— si ninguna fuerza actúa sobre él.

Reflexiona sobre el resultado de los experimentos de la sección anterior y el ejemplo de las sondas Voyager, y enuncia con tus propias palabras qué es lo que dice esta primera ley de Newton.

Luego, describe al menos cinco situaciones de la vida real en las que hayas observado que esta ley intervenga.

En la sección *Las tres leyes del movimiento de Newton*, hay un enunciado correcto de la primera ley; no lo revises hasta que tengas uno tuyo, y hayas revisado las secciones correspondientes a la segunda y tercera leyes.

Hay un detalle que no hemos abordado respecto a esta primera ley del movimiento; tiene que ver con algo llamado “fuerza neta”. Regresaremos al tema un poco más adelante; por el momento, pasa a la siguiente sección.

Segunda ley del movimiento de Newton

Estás trabajando para reflexionar sobre el concepto de fuerza como causa del cambio en el estado de movimiento o aceleración por medio de situaciones problemáticas.

Coloca un libro o una libreta pequeña sobre la mesa en la que estés trabajando. Claramente, su velocidad —en el sistema de referencia de la mesa— es cero, el objeto se encuentra en reposo. La primera ley de Newton establece que se mantendrá así, a menos que una fuerza se oponga a ello.

Ahora empújalo por la superficie de la mesa. Como es evidente, la velocidad del objeto —siempre en el sistema de referencia de la mesa— deja de ser cero, es decir, hay un cambio en su velocidad en un tiempo determinado.

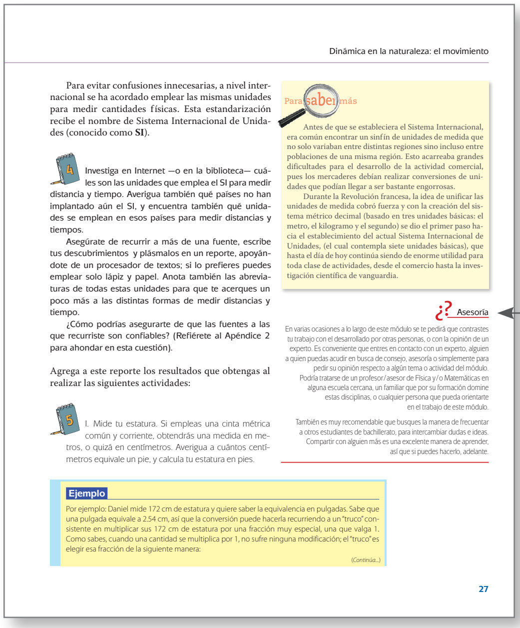
152

**Indicador de desempeño**

Indica las acciones que realizarás en un periodo determinado. Al conjuntar los diversos desempeños enunciados lograrás el propósito formativo de la unidad. Utilízalos como un referente para valorar de manera continua tu desempeño.

**Un momento de reflexión…**

Hallarás una serie de cuestionamientos relacionados con el problema planteado al inicio de la unidad de estudio, con la finalidad de que reflexiones sobre ellos, tomando como base lo que has aprendido.



Dinámica en la naturaleza: el movimiento

Para evitar confusiones innecesarias, a nivel internacional se ha acordado emplear las mismas unidades para medir cantidades físicas. Esta estandarización recibe el nombre de Sistema Internacional de Unidades (conocido como **SI**).

4 Investiga en Internet —o en la biblioteca— cuáles son las unidades que emplea el SI para medir distancia y tiempo. Averigua también qué países no han implantado aún el SI, y encuentra también qué unidades se emplean en esos países para medir distancias y tiempos.

Asegúrate de recurrir a más de una fuente, escribe tus descubrimientos y plásmalos en un reporte, apoyándote de un procesador de textos; si lo prefieres puedes emplear solo lápiz y papel. Anota también las abreviaturas de todas estas unidades para que te acerques un poco más a las distintas formas de medir distancias y tiempo.

¿Cómo podrías asegurarte de que las fuentes a las que recurriste son confiables? (Refiérete al Apéndice 2 para ahondar en esta cuestión).

Agrega a este reporte los resultados que obtengas al realizar las siguientes actividades:

5 I. Mide tu estatura. Si empleas una cinta métrica común y corriente, obtendrás una medida en metros, o quizá en centímetros. Averigua a cuántos centímetros equivale un pie, y calcula tu estatura en pies.

Para saber más

Antes de que se estableciera el Sistema Internacional, era común encontrar un sinfín de unidades de medida que no solo variaban entre distintas regiones sino incluso entre poblaciones de una misma región. Esto acarreaba grandes dificultades para el desarrollo de la actividad comercial, pues los mercaderes debían realizar conversiones de unidades que podían llegar a ser bastante engorrosas.

Durante la Revolución francesa, la idea de unificar las unidades de medida cobró fuerza y con la creación del sistema métrico decimal (basado en tres unidades básicas: el metro, el kilogramo y el segundo) se dio el primer paso hacia el establecimiento del actual Sistema Internacional de Unidades, (el cual contempla siete unidades básicas), que hasta el día de hoy continúa siendo de enorme utilidad para toda clase de actividades, desde el comercio hasta la investigación científica de vanguardia.

¿? Asesoría

En varias ocasiones a lo largo de este módulo se te pedirá que contrastes tu trabajo con el desarrollado por otras personas, o con la opinión de un experto. Es conveniente que entres en contacto con un experto, alguien a quien puedas acudir en busca de consejo, asesoría o simplemente para pedir su opinión respecto a algún tema o actividad del módulo. Podría tratarse de un profesor/asesor de Física y/o Matemáticas en alguna escuela cercana, un familiar que por su formación domine estas disciplinas, o cualquier persona que pueda orientarte en el trabajo de este módulo.

También es muy recomendable que busques la manera de frecuentar a otros estudiantes de bachillerato, para intercambiar dudas e ideas. Compartir con alguien más es una excelente manera de aprender, así que si puedes hacerlo, adelante.

Ejemplo

Por ejemplo: Daniel mide 172 cm de estatura y quiere saber la equivalencia en pulgadas. Sabe que una pulgada equivale a 2.54 cm, así que la conversión puede hacerla recurriendo a un “truco” consistente en multiplicar sus 172 cm de estatura por una fracción muy especial, una que valga 1. Como sabes, cuando una cantidad se multiplica por 1, no sufre ninguna modificación; el “truco” es elegir esa fracción de la siguiente manera:

(Continúa...)

27

**Asesoría**

Son sugerencias para que el estudiante recurra a otra persona que conozca o maneje el tema para intercambiar o enriquecer puntos de vista.

# Tu plan de trabajo

Este libro está diseñado con el propósito de aplicar las herramientas matemáticas de Geometría, Trigonometría y modelos matemáticos en el análisis de la dinámica del movimiento de los fenómenos naturales presentes en el entorno, empleados en el desarrollo de la ciencia y tecnología.

Teniendo esta base, con las actividades propuestas en este texto, se espera que desarrolles una serie de competencias que se describieron en el apartado "Presentación". Para lograrlo, te será útil seguir las siguientes recomendaciones:

Dedica al estudio del módulo por lo menos tres horas diarias, de lunes a viernes. Procura elegir un horario fijo, lo cual te ayudará a generar mejores hábitos de trabajo.

Con la finalidad de reforzar habilidades, saberes y actitudes, encontrarás actividades para realizar operaciones matemáticas en las que apliques procedimientos que te lleven a la solución de problemas; actividades experimentales, con ellas realizarás experimentos que permiten aplicar y comprobar algunos de los saberes que vas estudiando, también encontrarás actividades de "seguimiento", las cuales te permiten avanzar poco a poco en la solución del problema plantado al inicio de cada unidad, tomando como base los saberes que has aprendido. No te saltes ninguna de ellas, pues guiarán tu trabajo en el módulo.

A lo largo del texto aparecen numerosas preguntas que debes responder. Procura no seguir avanzando mientras no respondas cada una de estas preguntas: son importantes para que vayas construyendo conocimientos que necesitarás más adelante. En la mayoría de los casos, deberás poder responder estas preguntas meditando cuidadosamente sobre la situación que se esté abordando, usando tu ingenio y capacidad de razonamiento. En el Apéndice 1 al final del libro se incluyen las respuestas a prácticamente todas estas preguntas; aun así, sólo consúltalas una vez que hayas encontrado posibles soluciones por tu cuenta. Proceder de esta manera te llevará a ser consciente del avance en tu aprendizaje, porque podrás revisar tus aciertos y dificultades para tener claro qué punto es importante reforzar y poder dominarlo.

Como un apoyo más a tu estudio, hallarás información remarcada en recuadros, pon especial atención en ella. También hay una sección denominada *Un momento de reflexión*, en ella se busca que analices una serie de cuestionamientos relacionados con el problema planteado al inicio de la unidad, tomando en cuenta lo que has aprendido.

Los ejemplos son otro refuerzo constante en los temas estudiados, principalmente para ver aplicado en un caso concreto una ecuación y/o procedimiento, por ello encontrarás en varias ocasiones este tipo de ayuda.

Las ecuaciones matemáticas que estudiarás en cada unidad son clave para la resolución de problemas, por ello es que constantemente se hace referencia a ellas señalándote el tema en el que se abordó por primera vez. Si tú lo consideras conveniente, puedes elaborar un formulario en el que reúnas aquellas ecuaciones que se aborden.

Ten siempre a la mano libreta, lápiz, goma y calculadora científica. Algunas actividades requieren que trabajes desde una computadora con conexión a Internet; si no tienes acceso a la red en casa, podrías trabajar desde un café internet o una biblioteca.

Por otro lado, algunas actividades te piden que elabores un texto y lo incluyas en tu "portafolio del estudiante". Este portafolio puede ser físico o digital, y consiste en una selección de trabajos —textos, soluciones a problemas— realizados por ti, recopilados en un sólo lugar con el objeto de constituir un conjunto de evidencias de tus avances y aprendizajes.

En varias ocasiones se te pedirá que consultes la opinión de un "experto de confianza". A ese respecto, será importante que busques la manera de tener contacto con alguna persona, que podría ser desde tu profesor de la secundaria hasta algún familiar con conocimientos de Física y Matemáticas, que sea tu "experto de confianza", con quien puedas acudir en busca de asesoría o para pedir su opinión sobre tu trabajo con el módulo.

También es conveniente que busques la manera de frecuentar a otros estudiantes de bachillerato y compartas con ellos tus dudas, avances, y los resultados de algunas actividades en las que específicamente se te pide que lo hagas.

Mucho ánimo, estamos seguros de que lo harás excelente. ¡Adelante!

# ¿Con qué saberes cuento?

1. Lee con atención las siguientes situaciones y realiza lo que se pide en cada una de ellas.

   Para ello es importante que plantees una ecuación que describa la situación propuesta, y que resuelvas la ecuación para responder lo que se pregunta.

   - Un mago pide a un voluntario que piense en un número y a continuación, lo multiplique por 4; al resultado le sume 6; luego divida entre 2; sume el número que pensó y finalmente reste 2. El voluntario obtiene como resultado el número 10. ¿Cuál es el número que pensó al principio?
   - La diagonal de un cuadrado tiene 10 cm de longitud. ¿Cuánto mide cada uno de sus lados?

2. De las siguientes parejas de variables, señala cuáles son directamente proporcionales (DP), cuáles son inversamente proporcionales (IP) y cuáles no son ni lo uno ni lo otro. Explica brevemente el porque de tu elección.

   2.1 Radio de una circunferencia / Área encerrada por la circunferencia

   2.2 Número de trabajadores en una obra / Tiempo en que la obra quedará completa

   2.3 Radio de una circunferencia / Longitud de la circunferencia

   2.4 Flujo de agua en un grifo / Tiempo que el grifo tarda en llenar una pileta

2.5 Diámetro de una circunferencia / Radio de la circunferencia

2.6 Altura de una caja de base fija / Volumen de la caja

Las respuestas correctas están en el Apéndice 1. Sólo debes revisarlas si ya has obtenido unas respuestas por tu cuenta; de nada servirá que veas las soluciones si no las has trabajado tú, pues no estarías desarrollando los aprendizajes que necesitas.

No deberías comenzar a estudiar este módulo si no consigues responder correctamente todas las preguntas, pues sería señal de que no dominas aún los conocimientos previos que requerirás.

Si ese fuera el caso, te sugerimos que dediques un tiempo a estudiar los conceptos de ecuación lineal y proporcionalidad; es importante que seas capaz de resolver una ecuación lineal dada, y que sepas reconocer parejas de variables que son directamente proporcionales. El libro de Fuenlabrada, S. (2007). *Aritmética y Álgebra*, México: McGraw-Hill puede servirte de apoyo, lo mismo que el módulo *Representaciones simbólicas y algoritmos* de este bachillerato.

Si por el contrario, conseguiste responder todo lo que se solicitaba y proporcionar explicaciones válidas sobre tus razonamientos y procedimientos, entonces estás listo para comenzar.

UNIDAD 1

# Movimiento rectilíneo

## ¿Qué voy a aprender y cómo?

Mira a tu alrededor. Si estás al aire libre, sólo mira con atención. Si estás en una habitación, mira por la ventana más cercana. ¿Algo se mueve?

Lo más probable es que encuentres algo moviéndose. Los árboles bajo la fuerza del viento, vehículos, animales, otras personas: las posibilidades son muchas. El movimiento es un fenómeno tan común en nuestro mundo que es difícil encontrar una situación en la que nada se esté moviendo.

Debido a lo anterior, estudiar el movimiento ha sido un tema de gran interés para el ser humano: ¿cómo se mueven los objetos?, ¿qué los hace moverse?, ¿puede algo quedarse en movimiento para siempre?, ¿qué elementos pueden facilitar -o dificultar- el movimiento? Si un objeto está moviéndose, ¿se puede predecir en dónde se encontrará después de cierto tiempo?

Las preguntas que la humanidad se ha hecho al respecto (y que ha logrado responder) son casi innumerables, y gracias a ellas hoy existen automóviles, trenes, barcos, aviones, bicicletas, es posible producir electricidad, entender y activar el mecanismo que permite que funcionen miles de aparatos... Si no estudiáramos y comprendiéramos el movimiento, viviríamos en un mundo muy distinto.

Debido a esto es muy importante que como estudiante de bachillerato, conozcas y puedas describir y explicar algunos tipos sencillos de movimiento, que se encuentran en la base de otros más sofisticados y que estudiarás en este primera unidad.

## ¿Con qué propósito?

El propósito de esta unidad es que relaciones los conceptos de movimiento a situaciones de tu entorno y los interpretes desde diversos enfoques utilizando la medición y herramientas matemáticas.

## ¿Qué saberes trabajaré?

Para aprender a estudiar e interpretar correctamente el movimiento rectilíneo uniforme en tu vida cotidiana, necesitarás desarrollar familiaridad con una serie de conceptos matemáticos, los cuales encuentran aplicación aquí, en el terreno de la Física; entre ellos se encuentran las nociones de vector, sistema de referencia, variación (proporcional e inversamente proporcional), relaciones y funciones (lineales y cuadráticas), así como la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas. También será necesario que aprendas a manejar ángulos, razones y funciones trigonométricas.

Emplearás todo ello para comprender ideas importantes como las de distancia, desplazamiento, velocidad, rapidez y aceleración, mismas que forman parte central del movimiento rectilíneo, tanto uniforme como acelerado. Su análisis también te ayudará a comprender mejor casos particulares de movimiento rectilíneo como la caída libre, y generalizaciones como el tiro parabólico.

Entre otras cosas, aprenderás que puedes distinguir entre tipos de movimientos al estudiar la clase de funciones que los representan; despejarás variables en diferentes ecuaciones para obtener información sobre objetos en movimiento, usando representaciones y métodos que podrán ser tanto gráficos como algebraicos para describirlos mejor. Incrementarás tu comprensión de diversas situaciones que involucran movimiento y expresarás con claridad ideas y conceptos relativos al tema.

Aprenderás que es posible expresar cantidades físicas empleando diferentes sistemas de unidades, y podrás trasladarte de un sistema a otro. Además, harás uso de herramientas tecnológicas para ayudarte a describir y resolver problemas que involucren movimiento, distancia y desplazamiento. Todo ello mientras aprendes a ser más analítico, más creativo, más autónomo y más sistemático.

Una ruta sugerida para abordar los saberes es la que puedes ver en la gráfica de la página siguiente.

## ¿Cuáles serán los resultados de mi trabajo?

Cuando termines de trabajar con esta primera unidad, deberás ser capaz de:

- Identificar variables y constantes en las relaciones y funciones que expresan el movimiento de los cuerpos, para diferenciar tipos de movimiento.
- Utilizar métodos algebraicos para obtener resultados cuantitativos en la solución de problemas relacionados con el movimiento en tu entorno.
- Construir e interpretar gráficas de desplazamiento-tiempo, velocidad-tiempo para diferenciar tipos de movimientos y relacionarlos a situaciones de tu entorno.
- Utilizar software matemático para la representación e interpretación del movimiento rectilíneo.
- Argumentar tus conclusiones sobre una investigación descriptiva referente al movimiento.
- Resolver de manera analítica situaciones problemáticas que involucren el movimiento rectilíneo por medio de herramientas matemáticas.
- Relacionar las variables de un proceso natural para la construcción de modelos matemáticos que permitan su interpretación.

**Movimiento rectilíneo**

- Ayuda humanitaria
- El camino de Don Martín
- Convirtiendo unidades
- Movimiento rectilíneo uniforme
- Funciones y movimiento
- Las mañanas sabatinas de Citlalli
- Experimentando con el movimiento rectilíneo uniforme
- Otra clase de movimiento
- Recapitulando
- Ecuación del movimiento uniformemente acelerado
- El cambio del cambio
- Disparo al cielo azul
- ¡Fuera abajo!
- ¿Gol?
- En pleno vuelo
- De vuelta al avión de ayuda humanitaria

• Emplear los conceptos del módulo para formular hipótesis relacionadas a fenómenos y problemas planteados, afines con la tecnología.

## ¿Cómo organizaré mi estudio?

Lo más recomendable, como se mencionó en la sección *Tu plan de trabajo*, es que dediques a tus estudios un mínimo de 3 a 4 horas diarias, de lunes a viernes, procurando mantener un horario fijo. Haciéndolo así, tus avances deberían ser —al menos aproximadamente— los siguientes:

Semana 1. Desde la *evaluación diagnóstica* hasta la sección *¡Fuera abajo!*. En el camino encontrarás algunas actividades de corte experimental que son opcionales; sería en todo caso muy recomendable que las lleves a cabo, pues te ayudarán a comprender mejor varias ideas importantes. En esta primera semana comenzarás abordando situaciones sencillas que involucran movimiento rectilíneo uniforme, para después pasar a estudiar el movimiento rectilíneo acelerado. Te encontrarás por primera vez con el concepto de función, y estudiarás con cierto detalle una clase particular de función llamada función lineal.

Semana 2. Esta semana, deberías continuar desde *Disparo al cielo azul* y llegar, para el martes o miércoles, hasta el final de la unidad. Estudiarás varios casos particulares del **movimiento acelerado** (caída libre, tiro vertical, tiro parabólico), analizarás una nueva clase de funciones, las funciones cuadráticas, y te iniciarás en el conocimiento y manejo de cantidades llamadas vectores, que te serán muy útiles más adelante.

¿Qué tal? Comencemos.

INICIO

## Ayuda humanitaria

Formas parte de la tripulación de un avión perteneciente a la Cruz Roja Internacional, que vuela rumbo a una población que acaba de sufrir el golpe de un terremoto que dejó inservibles las vías terrestres de comunicación que permiten llegar al poblado. Su misión es arrojar paquetes de ayuda humanitaria (que contienen agua, comida en conservas, enseres domésticos y de aseo personal) en la plaza central del pueblo, pues resulta imposible intentar un aterrizaje para entregar personalmente los paquetes.

Tu piloto necesita saber exactamente en qué momento debe accionar el mecanismo que arrojará los paquetes de ayuda, para que caigan dentro de la plaza central. Tu misión a bordo es indicarle cuál será ese momento.

¿Crees que sea posible calcular ese instante?

¿Por qué?

¿Qué información crees que haga falta para que el cálculo pueda efectuarse?

¿Conoces alguna herramienta matemática o física que pueda ser útil en esta misión?

Los conceptos y procedimientos que estudiarás a lo largo de esta primera unidad te ayudarán a responder estas preguntas, y eventualmente, calcular el momento justo en que la aeronave deberá dejar caer los paquetes de ayuda.

Para comenzar, es importante que antes analices otras situaciones que quizá sean más fáciles de abordar para ti, pero que te ayudarán a obtener elementos para ir solucionando este problema. Pasa a la siguiente sección.

**DESARROLLO**

## El camino de Don Martín

Don Martín es un comerciante del municipio de Tepotzotlán, en el Estado de México. Todos los días sale de su casa a las siete de la mañana y camina hasta el mercado en la cabecera municipal, en donde atiende su local de venta de semillas y granos. En un buen tramo del camino, Don Martín camina en línea recta y va pasando frente a las casas y comercios de varios vecinos amigos suyos. En la figura 1.1 puedes ver una representación de ese tramo:

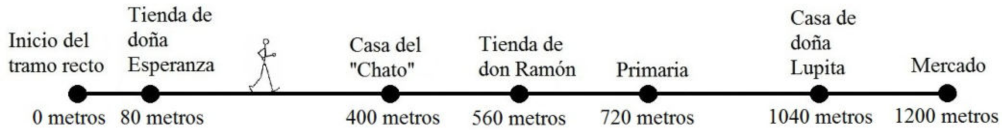



Figura 1.1

Los vecinos han notado que el comerciante es muy regular en sus recorridos, y hablando con ellos se pudo averiguar que siempre lo ven pasar a la misma hora. Así, fue posible armar la siguiente tabla, donde se muestra la hora a la que cada quien ve pasar a Don Martín:

| Vecino | Hora a la que ve pasar a Don Martín |
|---|---|
| Doña Esperanza | 7:11 |
| “Chato” | 7:15 |
| Don Ramón | 7:17 |
| Conserje de la primaria | 7:19 |
| Doña Lupita | 7:23 |

Tabla 1.1


Observa con mucho detenimiento la figura 1.1 y la tabla 1.1. Reflexiona con cuidado y contesta:

Conforme nuestro personaje va avanzando, hay dos variables cuyos valores van cambiando. Piensa en la situación y responde: ¿cuáles son?

No continúes hasta que hayas contestado esta pregunta. Sólo si encuentras una gran dificultad para responderla, dirígete al Apéndice 1, que aparece al final de este libro.

A una cantidad (por ejemplo, una longitud, un tiempo, una temperatura, etcétera…) cuyo valor va cambiando conforme se desarrolla algún proceso, se le llama **variable**. Por otro lado, una cantidad que se mantiene en el mismo valor durante el desarrollo de un proceso se llama **constante**.

Eso quiere decir que en este caso, tenemos dos variables. ¿Habrá alguna constante? Veamos:

La **rapidez** de un objeto (que puede ser una persona, un auto, un avión, cualquier cosa que se mueva) es una medida de qué tan rápido ese objeto recorre determinada distancia. Para calcularla, se divide la distancia recorrida entre el tiempo que lleva recorrerla.

**glosario**

**Variable:** cantidad cuyo valor puede cambiar.

**Constante:** cantidad cuyo valor se mantiene sin cambios.

## Ejemplo

Un automóvil sale de Pachuca rumbo a Ciudad Sahagún, en el Estado de Hidalgo. La tabla nos muestra la distancia recorrida por el auto conforme pasa el tiempo:

| Tiempo transcurrido (minutos) | Distancia recorrida (km) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 10 | 15 |
| 30 | 45 |

La información de la tabla nos permite determinar varias características del movimiento que representa. Entre otras cosas, podemos saber cuál es la rapidez del automóvil en los primeros 10 minutos de recorrido.

El camino para responder esta pregunta requiere, primero, que comprendas qué se está preguntando. Queremos saber la rapidez del vehículo en sus primeros 10 minutos de recorrido.

Ahora bien, la rapidez, de acuerdo con lo que acaba de verse, se calcula dividiendo la distancia recorrida entre el tiempo que lleva recorrerla. Si observas la tabla que registra el movimiento del automóvil, verás que en los primeros 10 minutos, recorrió 15 kilómetros. Entonces su rapidez en ese intervalo de tiempo se obtiene haciendo:

$$\text{Rapidez} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{15\,\text{km}}{10\,\text{min}} = 1.5\,{}^{\text{km}}\!/_{\text{min}}$$

Asegúrate de verificar que la operación es correcta. Además, nota que tanto la distancia recorrida como el tiempo transcurrido y la rapidez tienen unidades: la distancia está expresada en kilómetros, el tiempo en minutos, y la rapidez en kilómetros sobre minuto (que se acostumbra leer como "kilómetros por minuto").

En un momento haremos un par de comentarios respecto al tema de las unidades. Antes, otro ejemplo respecto al movimiento de este automóvil:

**Ejemplo**

¿Cuál es su rapidez entre los 10 y los 30 minutos de viaje?

Observa de nuevo la tabla. A los 10 minutos, el auto había recorrido 15 kilómetros, mientras que a los 30 minutos ya llevaba 45 kilómetros. Si te das cuenta, entre ambos momentos transcurrieron 20 minutos, y en ese tiempo el auto recorrió 30 kilómetros. Entonces, su rapidez fue de

$$\frac{30\,\text{km}}{20\,\text{min}} = 1.5\,{}^{\text{km}}\!/\!_{\text{min}}$$

Lo que significa que el auto no alteró su rapidez, al menos de acuerdo con lo que se puede saber con los datos de la tabla.


Analiza con cuidado los razonamientos y procedimientos que acaban de emplearse y regresa a la situación de Don Martín retomando la figura 1.1 y la tabla 1.1, para responder las siguientes preguntas:

I. ¿Cuál es la rapidez de Don Martín cuando va de la tienda de Doña Esperanza a la casa de su amigo "El Chato"?

II. ¿Cuál es su rapidez al ir de la casa de "El Chato" a la tienda de Don Ramón?

III. ¿Y al moverse de la tienda de Don Ramón a la primaria?

IV. Calcula también su rapidez al ir de la primaria a la casa de doña Lupita, y finalmente al trasladarse de la casa de doña Lupita al mercado.

V. La rapidez de Don Martín en su recorrido, ¿es variable o constante?

Consulta el Apéndice 1 una vez que hayas reflexionado cuidadosamente en las preguntas y hayas encontrado unas respuestas que te convenzan.

Es muy importante tomar en cuenta que las cantidades con las que estamos trabajando son cantidades físicas, y por lo tanto se miden empleando ciertas unidades; por ejemplo, la distancia recorrida se mide en metros, y el tiempo transcurrido lo estamos midiendo en minutos. La rapidez también tiene unidades: como se calcula dividiendo distancia entre tiempo, sus unidades son metros/minuto (que se lee "metros por minuto").

Por supuesto, si en algún momento estás usando otras unidades para medir distancias y tiempos, las unidades de la rapidez cambiarán correspondientemente; por ejemplo, si la distancia la estás midiendo en kilómetros y el tiempo en horas, la rapidez tendría unidades de kilómetros/hora ("kilómetros por hora").

3 ¿Cuáles serían las unidades de la rapidez si medimos la distancia en pulgadas y el tiempo en segundos?

---

**UN MOMENTO DE REFLEXIÓN**

Volvamos por un momento a la situación planteada al inicio de esta unidad. A bordo de un avión de la Cruz Roja Internacional, te diriges a una población para hacerle llegar paquetes de ayuda humanitaria, lanzándolos desde el aire. Necesitas informarle al piloto de la aeronave en qué momento se deben dejar caer los paquetes para que estos aterricen en la plaza del pueblo.

El concepto de rapidez seguramente será útil para resolver este problema. Sin embargo, el recorrido de Don Martín todavía es demasiado simple en comparación con los movimientos involucrados en esta situación: por un lado, está el movimiento del avión, el cual podemos suponer que tiene rapidez constante (igual que Don Martín). Pero por otra parte, está el movimiento de los paquetes cuando los lancen desde el avión. Ese ¿tendrá rapidez constante? ¿Ocurrirá en línea recta, como el movimiento del comerciante? ¿Qué nuevas herramientas necesitaremos para abordar este problema satisfactoriamente?

Sigue avanzando y lo descubrirás.

## Convirtiendo unidades

Estas trabajando para argumentar tus conclusiones sobre una investigación descriptiva referente al movimiento.

Como mencionamos hace un momento, las cantidades físicas se miden empleando diversas unidades: metros para la distancia, segundos para el tiempo, grados centígrados para la temperatura, etcétera…

Ahora bien, una misma cantidad se puede medir empleando varias unidades. Por ejemplo, la distancia se puede medir en metros pero también en kilómetros, en centímetros, en pies, en pulgadas,...

Para evitar confusiones innecesarias, a nivel internacional se ha acordado emplear las mismas unidades para medir cantidades físicas. Esta estandarización recibe el nombre de Sistema Internacional de Unidades (conocido como **SI**).

4 Investiga en Internet —o en la biblioteca— cuáles son las unidades que emplea el SI para medir distancia y tiempo. Averigua también qué países no han implantado aún el SI, y encuentra también qué unidades se emplean en esos países para medir distancias y tiempos.

Asegúrate de recurrir a más de una fuente, escribe tus descubrimientos y plásmalos en un reporte, apoyándote de un procesador de textos; si lo prefieres puedes emplear solo lápiz y papel. Anota también las abreviaturas de todas estas unidades para que te acerques un poco más a las distintas formas de medir distancias y tiempo.

¿Cómo podrías asegurarte de que las fuentes a las que recurriste son confiables? (Refiérete al Apéndice 2 para ahondar en esta cuestión).

Agrega a este reporte los resultados que obtengas al realizar las siguientes actividades:

5 I. Mide tu estatura. Si empleas una cinta métrica común y corriente, obtendrás una medida en metros, o quizá en centímetros. Averigua a cuántos centímetros equivale un pie, y calcula tu estatura en pies.

### Para saber más

Antes de que se estableciera el Sistema Internacional, era común encontrar un sinfín de unidades de medida que no solo variaban entre distintas regiones sino incluso entre poblaciones de una misma región. Esto acarreaba grandes dificultades para el desarrollo de la actividad comercial, pues los mercaderes debían realizar conversiones de unidades que podían llegar a ser bastante engorrosas.

Durante la Revolución francesa, la idea de unificar las unidades de medida cobró fuerza y con la creación del sistema métrico decimal (basado en tres unidades básicas: el metro, el kilogramo y el segundo) se dio el primer paso hacia el establecimiento del actual Sistema Internacional de Unidades, (el cual contempla siete unidades básicas), que hasta el día de hoy continúa siendo de enorme utilidad para toda clase de actividades, desde el comercio hasta la investigación científica de vanguardia.

### ¿? Asesoría

En varias ocasiones a lo largo de este módulo se te pedirá que contrastes tu trabajo con el desarrollado por otras personas, o con la opinión de un experto. Es conveniente que entres en contacto con un experto, alguien a quien puedas acudir en busca de consejo, asesoría o simplemente para pedir su opinión respecto a algún tema o actividad del módulo. Podría tratarse de un profesor/asesor de Física y/o Matemáticas en alguna escuela cercana, un familiar que por su formación domine estas disciplinas, o cualquier persona que pueda orientarte en el trabajo de este módulo.

También es muy recomendable que busques la manera de frecuentar a otros estudiantes de bachillerato, para intercambiar dudas e ideas. Compartir con alguien más es una excelente manera de aprender, así que si puedes hacerlo, adelante.

### Ejemplo

Por ejemplo: Daniel mide 172 cm de estatura y quiere saber la equivalencia en pulgadas. Sabe que una pulgada equivale a 2.54 cm, así que la conversión puede hacerla recurriendo a un "truco" consistente en multiplicar sus 172 cm de estatura por una fracción muy especial, una que valga 1. Como sabes, cuando una cantidad se multiplica por 1, no sufre ninguna modificación; el "truco" es elegir esa fracción de la siguiente manera:

*(Continúa...)*

*(Continuación...)*

- El numerador y el denominador deben ser iguales (para que efectivamente, la fracción valga 1).
- El numerador debe estar expresado en las unidades a las que Daniel quiere convertir su estatura, mientas que el denominador debe estar expresado en las unidades en las que ya está escrita su estatura.

En este caso, lo anterior significa que el numerador debe estar expresado en pulgadas, mientras que el denominador debe estarlo en centímetros. Una fracción que cumple con ambas condiciones es

$$\frac{1\text{ pulg.}}{2.54\text{ cm}}$$

Ahora, sólo hay que multiplicar la estatura que se nos proporcionó por esta fracción. Lo que sucederá es lo siguiente:

$$172\ \cancel{\text{cm}} \times \frac{1\text{ pulg.}}{2.54\ \cancel{\text{cm}}} - 67.72\text{ pulg.}$$

Los "cm" se cancelan. ¿Por qué?

Al efectuar la multiplicación, los “cm” se cancelan, y sólo sobreviven las pulgadas. Como la fracción vale 1, la estatura no sufrió modificación alguna, a parte de haber quedado expresada en pulgadas. Así que los 172 cm de estatura de Daniel equivalen a 67.72 pulgadas.

II. Como podrás imaginar, también podemos convertir las unidades de cantidades más sofisticadas. ¿En qué unidades estaba la rapidez que encontraste para Don Martín? Conviértela a unidades de yardas/segundo. Para ello, necesitas usar la misma idea que usaste para convertir las unidades de tu estatura... dos veces: una para convertir las unidades de longitud, y una segunda para convertir las unidades de tiempo.

III. Mide tu propia **rapidez** mientras caminas. Para ello, con una cinta métrica mide una distancia razonablemente larga (tal vez unos diez metros) en línea recta, y cronómetro en mano, determina el tiempo que te lleva atravesarla caminando a paso normal. Expresa tu velocidad en metros/segundo y también en kilómetros/hora.

IV. Ahora trata de resolver la siguiente situación. Un automóvil se mueve a 100 km/h. ¿Cuántos metros recorre cada minuto?

Consulta el Apéndice 1 cuando tengas listas tus propias respuestas. Organiza tu reporte de modo que separes claramente los resultados correspondientes a cada una de las actividades propuestas.

En el Apéndice 1 se incluyen algunas sugerencias sobre estas actividades y el reporte que elaborarás. Revísalo sólo si lo consideras necesario.

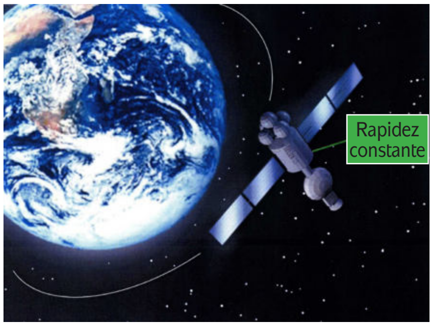

Supón que el avión que lleva la ayuda al pueblo del inicio de esta unidad viaja a 200 km/h. Calcula su velocidad en m/s. Anota este cálculo, junto con una breve explicación del problema al cual se refiere, y guarda el apunte en lo que será tu "portafolio del estudiante": En él podrás conservar notas, ideas y cálculos que poco a poco mostrarán cómo has ido avanzando en la unidad.

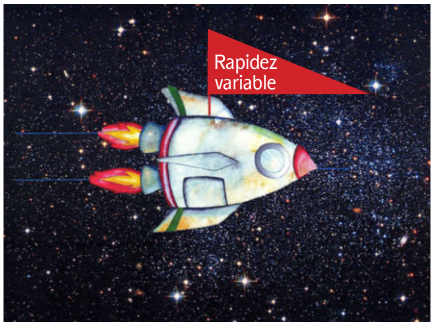
## Movimiento rectilíneo uniforme

Volvamos al recorrido de Don Martín. Un movimiento que como el suyo se realiza en línea recta, y en el que la rapidez se mantiene constante, se llama movimiento rectilíneo uniforme.

Movimiento rectilíneo uniforme. Movimiento en el que el objeto que se mueve lo hace:

1. En línea recta, y
2. Manteniendo una rapidez constante.






I. ¿Cuál de los vehículos exhibe las características del movimiento rectilíneo uniforme? ¿Por qué?

## Funciones y movimiento

**UN MOMENTO DE REFLEXIÓN**

¿Es rectilíneo uniforme el movimiento del avión en la situación planteada al inicio de esta unidad? Reflexiónalo. ¿Podría no serlo? ¿Qué tendría que suceder para que no lo fuera? Escribe tus ideas al respecto y si lo consideras necesario incorpora tu escrito a tu portafolio del estudiante.

**glosario**

**Variable dependiente:** una variable cuyo valor "depende" del valor que toma otra variable. Por ejemplo, en el caso de un automóvil que se mueve por una autopista con una velocidad constante, la distancia recorrida depende del tiempo que el auto lleve en movimiento. La distancia recorrida es la variable dependiente.

**Variable independiente:** una variable cuyo valor no "depende" de ningún factor externo, es decir, es "independiente". En muchas situaciones físicas, se suele tomar al tiempo como la variable independiente, pues el paso del tiempo no depende de —ni puede ser alterado por— ningún factor externo.

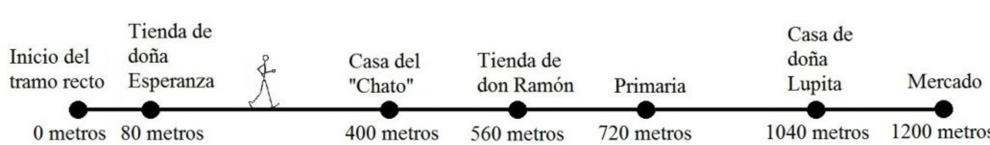
En muchas situaciones del mundo real hay variables involucradas (por ejemplo, en los casos que hemos estudiado hay un tiempo transcurrido y una distancia recorrida). Más aún, es muy frecuente que estas variables estén relacionadas entre sí, de modo que si se conoce el valor de una de ellas en un momento dado, es posible calcular el valor de la otra. Una **relación** de este tipo se conoce como **función**. Una función puede representarse de varias maneras, y aquí exploraremos algunas de ellas.

> **Función.** Relación entre dos variables, en la cual si se conoce el valor de una de ellas, es posible saber el valor de la otra.

En matemáticas se suele distinguir a las dos variables de una función llamándolas "**variable dependiente**" y "**variable independiente**". Cuando se estudia el movimiento, el tiempo se considera como la variable independiente (el paso del tiempo no depende de nada, es "independiente") mientras que, por ejemplo, la distancia es la variable dependiente (la distancia recorrida por un objeto "depende" del tiempo que lleva moviéndose).

> El tiempo siempre se considera como la variable independiente en cualquier movimiento.
>
> Las otras variables (que pueden ser la distancia, la rapidez, entre otras) se consideran variables dependientes: dependen del tiempo transcurrido.

Volvamos a la figura que representa el tramo recto del camino de Don Martín, y a la tabla en la que se especificaba la hora en la que cada vecino lo veía pasar:




| Vecino | Hora a la que ve pasar a Don Martín |
|---|---|
| Doña Esperanza | 7:11 |
| "Chato" | 7:15 |
| Don Ramón | 7:17 |

| Vecino | Hora a la que ve pasar a Don Martín |
|---|---|
| Conserje de la primaria | 7:19 |
| Doña Lupita | 7:23 |

Para empezar, reflexiona y responde:

**8** La rapidez de Don Martín, de acuerdo a lo que debiste encontrar, era constante e igual a 80 metros/minuto (es decir, recorre 80 metros cada minuto). Si esto es cierto y Doña Esperanza (cuya tienda está a 80 metros del inicio del tramo recto) lo ve pasar a las 7:11, entonces ¿a qué hora estaba Don Martín en el inicio del tramo recto?

No continúes hasta que respondas la pregunta. Verifica tu respuesta en el Apéndice 1 del final del libro (¡sólo cuando hayas hecho todo lo posible para hallarla por tu cuenta!)

Para simplificar un poco el análisis que realizaremos a continuación, hagamos dos cosas:

Primero, en lugar de fijarnos en la hora a la que cada vecino lo veía pasar, centrémonos en el tiempo que iba transcurriendo. O sea, si Don Martín entró al tramo recto a las 7:10, tomemos ese momento como el “instante cero”, y contemos a partir de él los tiempos registrados por sus vecinos.

Segundo, en lugar de ir nombrando a cada vecino, mejor anotemos la distancia que Don Martín iba recorriendo cuando pasaba frente a cada uno de ellos.

**9** La tabla siguiente ilustra los dos puntos anteriores. Reflexiona cuidadosamente y completa los espacios vacíos:

| Tiempo transcurrido (minutos) | Distancia recorrida por Don Martín en el tramo recto (metros) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| | 80 |
| | 400 |
| | 560 |
| 9 | |
| | 1040 |
| 15 | |

Si tienes dificultades para completar la tabla, sólo recuerda que Don Martín recorre 80 metros cada minuto. Entonces puedes calcular a los cuántos minutos había recorrido 400 metros, y también cuántos metros llevaba recorridos después de 9 minutos. Tomándolo con calma y razonando cuidadosamente lograrás llenar todos los espacios.

Consulta con tu experto de confianza si deseas una segunda opinión sobre tu tabla. Una vez que esté completa y te sientas seguro(a) de los valores que colocaste, continúa con la siguiente sección, en la que nos introduciremos un poco más en el estudio de las funciones.

## *El plano cartesiano*

La tabla 1.2 es una manera de representar la función (recuerda, la relación entre variables) tiempo-distancia para el recorrido de Don Martín. Existen otras formas de representar una función; una de ellas son las gráficas. Para comprender la manera en que esto se puede llevar a cabo, necesitas comprender primero lo que es el plano cartesiano.

Observa la figura 1.2, que representa la vista superior de un piso de oficinas. El punto verde representa la posición de Juan, uno de los oficinistas que trabaja en el lugar, mientras que los puntos azules indican las posiciones de cinco de sus compañeros de trabajo.

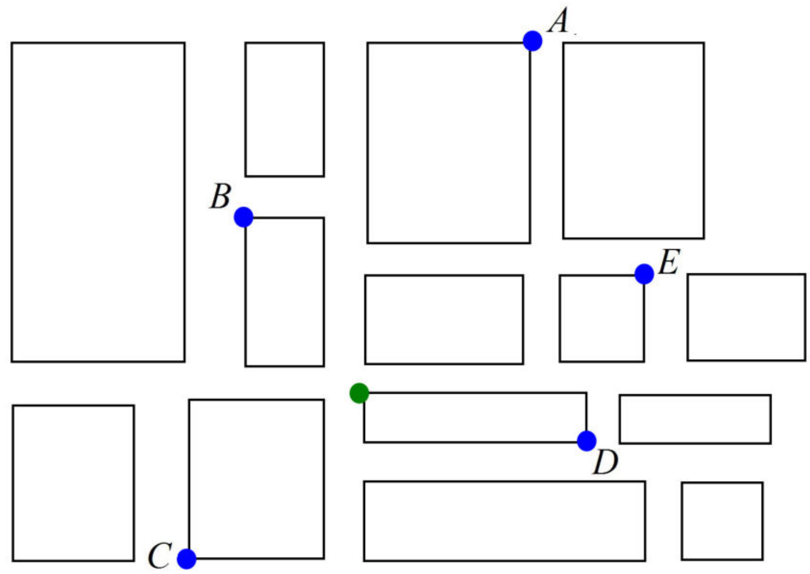



Figura 1.2

Una manera de ubicar con precisión las posiciones de todos los oficinistas es mediante un plano cartesiano, como se aprecia en la figura 1.3.

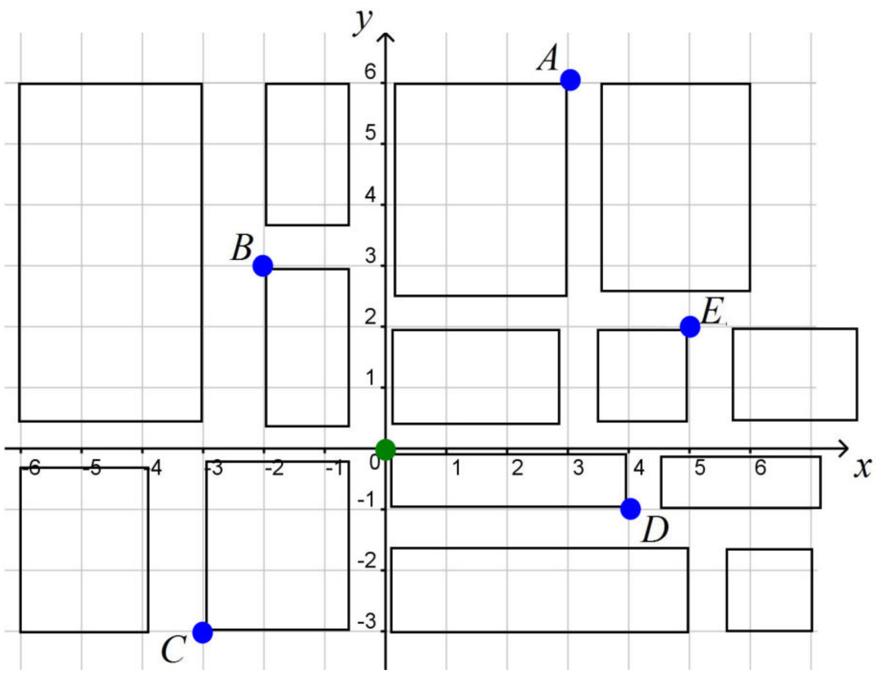



Figura 1.3

El plano cartesiano consiste precisamente en un plano, sobre el cual se han dibujado dos ejes (llamados ejes cartesianos) que no son más que rectas numéricas. Cada eje representa los valores de una variable determinada; es usual que la variable representada en el eje horizontal se etiquete con la letra $x$, mientras que la representada en el eje vertical se suele etiquetar con la letra $y$.

En el caso de la figura 1.3, ambos ejes representan longitudes, pero no necesariamente debe ser así (se puede representar en ellos cualquier variable).

El punto en el que se cruzan ambos ejes se llama origen de coordenadas; en este caso, el origen de coordenadas coincide con la posición de Juan. La figura 1.4 es una versión abstracta de las anteriores, en la que se han conservado sólo los ejes cartesianos y los puntos que indican la posición de los cinco compañeros de Juan:

**Para saber más**

René Descartes fue uno de los filósofos y matemáticos más brillantes que haya visto la humanidad. Mostró interés en los temas más variados: desde la posibilidad de construir un método que nos permitiera razonar sin riesgo de equivocarnos, hasta la explicación de los fenómenos meteorológicos.

Buscando una mejor manera de analizar objetos geométricos, hacia 1637 publicó una genial idea: ubicar puntos en un plano mediante la introducción de una versión primitiva de lo que hoy conocemos como los ejes cartesianos (llamados así en su honor), que permitirían asignarle a cada punto una pareja de números (sus coordenadas) por medio de las cuales su posición queda completamente especificada.

La introducción de esta idea permitió que la Geometría y el Álgebra, que se habían desarrollado por separado desde los tiempos de la antigua Grecia, se fusionaran en una nueva y poderosa rama del conocimiento: la Geometría

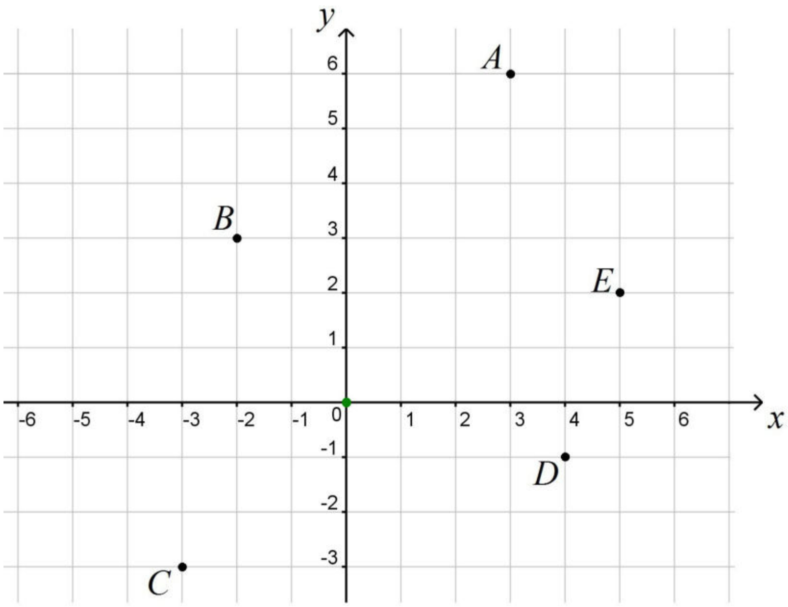



Figura 1.4

◀

analítica. Las técnicas de la Geometría analítica facilitaron el desarrollo de la ciencia y la tecnología, y el día de hoy vemos el resultado de sus aplicaciones por doquier: en las prodigiosas construcciones de las grandes ciudades, puentes, presas, en el trazo de rutas aéreas y la hazaña de los viajes espaciales, el desarrollo de videojuegos, etcétera.

La forma de ubicar un punto en el plano (en este caso cada punto corresponde a la posición de los cinco oficinistas) es asignarle dos números que constituirán sus coordenadas; estos números corresponden a la distancia que hay que desplazarse a lo largo de cada eje (partiendo desde el origen, y comenzando siempre por el eje horizontal) para llegar al punto en cuestión.

Por ejemplo, para llegar desde el origen (la posición de Juan) hasta la posición del oficinista A, se deben recorrer tres unidades en la dirección positiva del eje horizontal, y después seis unidades en la dirección positiva del eje vertical. Esto se escribe (3, 6). Esas son las coordenadas del punto A.

De esta manera, a todo punto en el plano le corresponde una pareja de números, sus coordenadas, que indican su ubicación respecto al origen de coordenadas.

Por último, es importante saber que en un plano cartesiano, al eje vertical también se le llama eje de las ordenadas, mientras que el horizontal recibe el nombre de eje de las abscisas.


I. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos B, C, D y E?

II. Dibuja en el mismo plano cartesiano los puntos cuyas coordenadas son (2, 4), (-5, -2) y (6, 1). Señálalos con las letras F, G y H, respectivamente. Recuerda que un signo negativo en la primera coordenada significa desplazarse hacia la izquierda; en la segunda, desplazarse hacia abajo.

Sólo continúa hasta que hayas respondido la pregunta y hayas graficado los puntos señalados. Y sólo entonces, verifica tus respuestas en el Apéndice 1.

## Representando funciones

Vuelve ahora a la tabla 1.2. Aquí está completa:

| Tiempo transcurrido (minutos) | Distancia recorrida por Don Martín en el tramo recto (metros) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 80 |
| 5 | 400 |
| 7 | 560 |
| 9 | 720 |
| 13 | 1040 |
| 15 | 1200 |

Tabla 1.2

Puedes considerar a cada pareja tiempo-distancia como las coordenadas de un punto en un plano cartesiano, en el que la variable independiente (recuerda, el tiempo) se representa en el eje horizontal mientras que la variable dependiente (en este caso, la distancia) se representa en el eje vertical. Mira la figura 1.5:

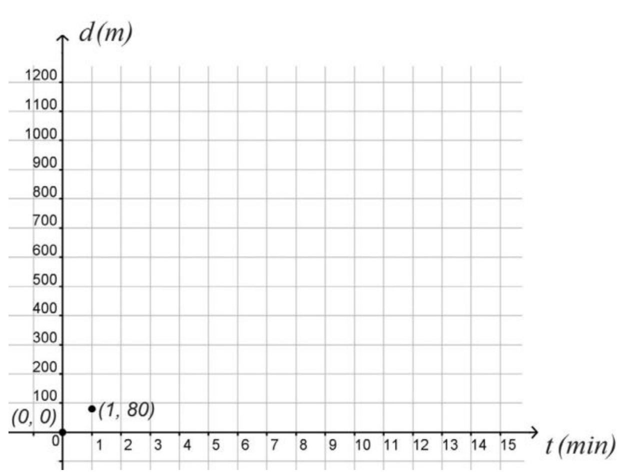



Figura 1.5

Las letras $d$ y $t$ significan, respectivamente, distancia y tiempo. Es usual representar a las variables con letras, y así lo haremos en adelante. Cuando se escribe $d$(m) se está diciendo que la distancia se mide en metros, mientras que $t$(min) indica que el tiempo se mide en minutos.

En esta figura ya aparecen graficados dos puntos: el (0, 0) que corresponde al primer renglón de la tabla, donde $t = 0$ y $d = 0$. También aparece el punto (1, 80), que corresponde al segundo renglón donde $t = 1$ y $d = 80$.


I. Dibuja en el mismo plano los puntos que corresponden a los demás renglones de la tabla, y observa con detenimiento el modo en que quedan ubicados. Si los unes, ¿forman alguna figura geométrica conocida? ¿Cuál?

Una función cuya gráfica es una línea recta se llama lineal.

II. ¿Es lineal la función tiempo-distancia para el recorrido de Don Martín?

**glosario**

**Proporcionales:** dos variables son proporcionales si cuando una cambia de valor, la otra también lo hace y además lo hace en la misma "proporción" que la primera. Por ejemplo, si la primera aumenta al doble, la segunda se incrementa también al doble.

Probablemente hayas notado que en la tabla 1.2, la distancia y el tiempo tienen valores **proporcionales**. Dirígete al Apéndice 4 si quieres revisar con más detalle lo que eso significa. Más adelante el tema de la proporcionalidad adquirirá importancia.

Así que hemos hallado dos formas de representar esta función tiempo-distancia: mediante una tabla, y mediante una gráfica. Los valores de la tabla resultaron proporcionales mientras que la gráfica se ajusta a una línea recta.

Veamos ahora una forma más de representar la misma función: mediante una ecuación.

Dirígete al Apéndice 5 si quieres revisar detalles sobre lo que es una ecuación.

Volvamos una vez más a la versión completa de la tabla 1.2:

| $t$ (minutos) | $d$ (metros) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 80 |
| 5 | 400 |
| 7 | 560 |
| 9 | 720 |
| 13 | 1040 |
| 15 | 1200 |

Tabla 1.2

Analiza cuidadosamente los datos que contiene y escribe una ecuación que se ajuste a ella. Para ello, sólo pregúntate: ¿qué operaciones aritméticas hay que efectuar con cada valor de $t$ para obtener el correspondiente valor de $d$? (desde luego, en todos los casos las operaciones deben ser idénticas).

### Ejemplo

Una hormiga sale de su hormiguero y se mueve en línea recta alejándose de él. Metro y cronómetro en mano, vamos tomando medidas de la distancia ($d$) que ha recorrido y del tiempo ($t$) que ha pasado desde que salió del hormiguero. Con esas medidas se construye la tabla siguiente:

| t (minutos) | d (metros) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 2 | 4 |
| 3 | 6 |
| 4 | 8 |

Quisiéramos obtener una ecuación que nos permita calcular los distintos valores de $d$ a partir de los correspondientes valores de $t$.

Si observas con atención, puedes darte cuenta de que si se multiplican los valores de $t$ por 2, se obtienen los correspondientes valores de $d$. Esto significa que

$$d = 2t$$

con lo que tenemos la ecuación que queríamos.

### Ejemplo

Esta otra tabla describe el movimiento de una segunda hormiga, que para el momento en que echamos a andar nuestro cronómetro ya se había alejado cierta distancia del hormiguero. Tomando mediciones similares a las del caso anterior, se obtiene esta tabla:

| t (minutos) | d (metros) |
|---|---|
| 0 | 10 |
| 2 | 12 |
| 3 | 13 |
| 4 | 14 |

Nuevamente, queremos una ecuación que permita calcular los valores de $d$ a partir de los de $t$. Esta vez el patrón es un poco distinto, pero si lo piensas un poco descubrirás que los valores de $d$ se obtienen al sumar 10 a los de $t$. Esto se escribe

$$d = t + 10$$

la cual es la ecuación que estábamos buscando.

**12** Es tu turno: Regresa a la tabla 1.2 y ayudándote con los ejemplos anteriores, escribe la ecuación que permite calcular los valores de $d$ a partir de los de $t$.

Continúa sólo cuando tu ecuación esté lista y tu estés seguro(a) de que es correcta. Verifícala en el Apéndice 1.

La ecuación que obtuviste es de un tipo muy particular: es una ecuación lineal (revisa el Apéndice 5 para encontrar más detalles). Además, esta ecuación es una tercera representación de la función tiempo-distancia que además es muy útil, porque te permite hallar fácilmente el valor de una de las variables si conoces el valor de la otra.

### Ejemplo

En el caso de que la ecuación fuera

$$d = 4t$$

Podríamos calcular cuántos minutos deben pasar para recorrer 40 metros, si sustituimos el valor $d = 40$ (recuerda, $d$ es la distancia recorrida) en la ecuación. Tendríamos

$$40 = 4t$$

Y podemos despejar a $t$ (revisa el Apéndice 5 para detalles sobre el proceso de despeje de una variable) de la siguiente manera:

| | |
|---|---|
| $40 = 4t$ | Esta es la ecuación una vez que sustituimos $t = 40$ |
| $\Rightarrow \frac{40}{4} = t$ | Dividimos entre 4 ambos lados de la ecuación |
| $\Rightarrow 10 = t$ | Tenemos nuestro resultado |

Entonces, para recorrer 40 metros en este ejemplo, deben pasar 10 minutos.

**13** Tu turno: empleando la ecuación que hallaste para el caso de Don Martín, responde las siguientes preguntas.

I. Cuando han pasado 11 minutos, ¿qué distancia se ha recorrido?

II. Si han pasado 14 minutos, ¿cuántos metros lleva recorridos?

III. ¿Cuántos minutos deben transcurrir para que se recorran 160 metros?

IV. ¿En cuánto tiempo se recorrerían 640 metros?

Como es usual, asegúrate de contestar correctamente todas las preguntas antes de continuar.

Recuerda cuál fue la rapidez de Don Martín en su recorrido. ¿Aparece la rapidez en tu ecuación? Toma nota de ello, será útil más adelante.

Hemos encontrado varias cosas importantes, y es momento de recapitular:

> Una función es la relación de dependencia entre dos variables, llamadas dependiente e independiente, de manera que si se conoce el valor de una de ellas, puede obtenerse el valor de la otra.
>
> Existen muchas maneras de representar una función. Entre ellas, tres nos interesan particularmente: tablas, gráficas y ecuaciones.

> Una función se llama lineal si sucede que:
>
> a) Su tabla presenta valores proporcionales,
> b) Su gráfica es una línea recta, y
> c) Su ecuación es lineal.

Más adelante haremos una precisión respecto al inciso a). En ocasiones, puede que la tabla no presente, a primera vista, valores proporcionales; pero los incrementos de esos valores, aunque parezca extraño, sí lo serán. Eso lo veremos un poco más adelante.

El hecho de que una función permita calcular el valor de una de las variables cuando se conoce el de la otra es una de sus características más importantes y más útiles: en este momento estamos tratando con una situación relativamente sencilla -el movimiento en línea recta de Don Martín- pero estas ideas también se aplican a movimientos que pueden ser mucho más sofisticados: el vuelo de un avión, la trayectoria de un proyectil, el viaje de un barco en altamar. Imagina lo útil que es para la industria de las telecomunicaciones poder conocer la posición de un satélite artificial conociendo el tiempo que lleva en órbita.


Del mismo modo, la noción de función jugará un papel importante en la solución del problema planteado al inicio de esta unidad.

En el supuesto de que el avión vuele en línea recta con una rapidez constante de 200 km/h, escribe una ecuación que permita calcular la distancia *d* que ha recorrido después de un tiempo de vuelo *t*. Piénsalo cuidadosamente, lo que has aprendido hasta el momento te permitirá escribir esa ecuación sin demasiadas dificultades.

Esta ecuación, que representa la función distancia recorrida-tiempo transcurrido para el avión en vuelo, seguramente será útil para predecir el momento en que se deberán dejar caer los paquetes de ayuda. Sin embargo, la ecuación sólo describe el movimiento del avión; pero cuando se lancen los paquetes, ¿seguirán también un movimiento rectilíneo uniforme?

Anota tu ecuación junto con un breve texto explicativo (unas cuantas líneas) y considera incorporarlo a tu portafolio del estudiante.

Sigue avanzando, en las páginas siguientes mejorarás tu comprensión y manejo del concepto de función. Posteriormente exploraremos un nuevo e importante tipo de movimiento, que nos servirá mucho para entender cómo caen los paquetes desde el avión.

## Experimentando con el movimiento rectilíneo uniforme


Es momento de que pongas manos a la obra en una actividad experimental. Consigue los materiales que se enlistan a continuación y sigue las instrucciones cuidadosamente.

**Materiales**

- Cinta métrica.
- Cronómetro.
- Una canica, balín o pelota pequeña.
- Un trozo de cortinero de unos 30 cm de longitud, o una tabla de unos 30 x 15 cm.
- Una superficie plana (como una mesa o un suelo perfectamente lisos y lo más horizontales posible).

**Procedimiento**

Apoya el cortinero o la tabla en una pared, de manera que mantenga una inclinación fija respecto al piso. Usando la cinta métrica, realiza marcas sobre la superficie lisa (que puedas borrar con facilidad) a la misma distancia unas de las otras, hasta llegar a una distancia de alrededor de un metro (observa la figura 1.6).

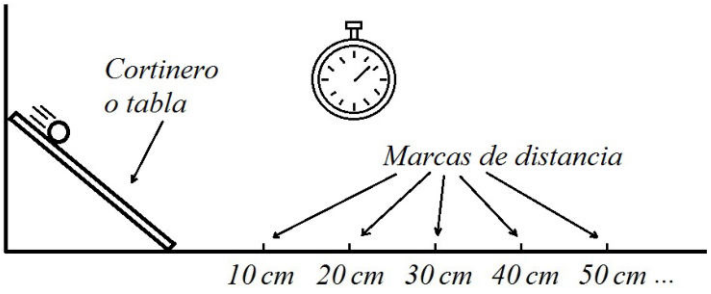



Figura 1.6

A continuación prepara el cronómetro, coloca el balín a una altura determinada sobre el cortinero —marca esa altura— y suéltalo (no le des ningún impulso, sólo déjalo rodar). En el momento en que el balín toque el suelo, echa a andar el cronómetro.

Registra el tiempo en el que el balín llega a tu primera marca. Recógelo y lánzalo de nuevo, desde la misma altura que la primera vez. Repite el experimento midiendo ahora el tiempo que tarda en llegar a la segunda marca, y continúa hasta que registres los tiempos que el balín tarda en recorrer todas las marcas que hayas colocado.

Pon todo tu empeño en realizar mediciones tan precisas como te sea posible. Asegúrate de colocar el balín siempre en la misma posición inicial, y de mantener fijo el cortinero o tabla, de modo que siempre tenga la misma inclinación respecto al suelo.

Para lograr mayor exactitud, realiza las mediciones varias veces y registra los promedios. Con esa información llena la tabla siguiente:

| Tiempo | Distancia |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

**Análisis**

Observa que tienes aquí una nueva función tiempo-distancia.

Emplea una hoja de cálculo electrónica (como Excel o Calc) para dibujar tu gráfica de dicha función en un plano cartesiano, o dibújala empleando lápiz y papel (pon especial cuidado si lo vas a hacer así; de hecho, sería conveniente que emplearas papel milimétrico). Recuerda que el tiempo es la variable independiente y que se le debe colocar en el eje horizontal, mientras que la distancia es la variable dependiente y va en el eje vertical.

Observa la forma de la gráfica. ¿Corresponde a la de una función lineal?

El movimiento del balín tal y como tienes registrado ¿es rectilíneo uniforme? ¿Por qué sí o por qué no?

Encuentra una ecuación que se ajuste lo mejor posible a tu tabla y a tu gráfica. Como obtuviste la tabla empleando datos experimentales y estos pueden tener cierto margen de error, es probable que la ecuación sólo arroje resultados aproximados a los valores de la tabla: esto suele ocurrir en el trabajo experimental. Lo importante es que la ecuación se aproxime tanto como sea posible a los valores obtenidos experimentalmente.

Observa la tabla, la gráfica y la ecuación que obtuviste. ¿Cuál es la rapidez del balín en su recorrido?

Al hacer que el balín partiera siempre desde la misma posición, manteniendo el cortinero con la misma inclinación, estabas controlando el experimento de manera que la rapidez del balín fuera aproximadamente la misma en todos los recorridos. Repite el experimento colocando el cortinero en una nueva inclinación respecto al suelo. Toma las mediciones, llena una nueva tabla, grafícala y encuentra una ecuación que se ajuste lo mejor posible a tus nuevos datos. ¿La función tiempo-distancia es lineal? ¿El movimiento es rectilíneo uniforme? ¿Cuál es la nueva rapidez?

Reúne tus procedimientos y resultados en un breve reporte de investigación que escribirás en un procesador de textos, hojas de papel o en tu cuaderno: elabora una portada en la que le des un título, especifiques el nombre del módulo y coloques tu nombre. Luego organiza tu reporte de manera que tenga una introducción en la que detalles las características del movimiento rectilíneo uniforme, un desarrollo en el que expliques cuáles fueron las actividades que realizaste para llevar a cabo el experimento, un apartado de resultados donde vacíes tus tablas, gráficas y ecuaciones, y finalmente otro apartado de conclusiones, en el que establezcas si el movimiento del balín es o no rectilíneo uniforme, y más importante, el porqué de tus afirmaciones.

Como puedes observar, el movimiento rectilíneo uniforme es real, ocurre en situaciones cotidianas y lo que es aún más importante, estudiarlo puede ayudarnos a entender fenómenos que pueden llegar a ser muy diversos. Continuemos con este estudio, que poco a poco nos llevará a terrenos muy interesantes.

## Las mañanas sabatinas de Citlalli

Hasta el momento has estudiado movimientos rectilíneos uniformes que, al graficarse en el plano cartesiano, arrojan rectas que parten del origen del plano (revisa tus gráficas). Pero no siempre tiene que ser así.

Analicemos la situación de Pablo y Citlalli para estudiar otros tipos de movimiento.

Pablo y Citlalli son muy buenos amigos. Son vecinos de la misma colonia en la Ciudad de México, y sus casas están separadas por una distancia de 60 metros. Todos los sábados por la mañana Citlalli sale a tomar su clase de inglés a un centro de idiomas cercano. Es una chica a la que le gusta mucho caminar así que va a su clase a pie, recorriendo 50 metros cada minuto en línea recta, siguiendo la avenida sobre la que están la casa de Pablo, la suya y el centro de idiomas (en ese orden).


Empleando esta información, Pablo puede conocer la distancia que lo separa de Citlalli conforme pasa el tiempo.

I. Ayúdalo a llenar la siguiente tabla, en la que $t$ representa el tiempo transcurrido desde que Citlalli sale de casa y $d$ es la distancia entre ella y Pablo, que se queda en su casa.

| $t$ (min) | $d$ (m) |
|---|---|
| 0 | 60 |
| 1 | |
| | 160 |
| 4 | |
| | 310 |
| 6 | |
| | 410 |
| | 460 |
| 10 | |

Tabla 1.3

Una vez que tu tabla esté completa, pasa a la siguiente sección. Puedes verificar tus datos en el Apéndice 1, pero sólo cuando hayas hecho tu propio intento: de nada servirá si ves las soluciones y no comprendes cómo se hallaron.

## Cuando el origen no es el comienzo

**17** Usa papel y lápiz para dibujar un plano cartesiano en el que grafiques los datos de la tabla 1.3. Examina atentamente tanto la tabla como la gráfica, y responde:

I. ¿El movimiento de Citlalli es rectilíneo uniforme? ¿Por qué?

II. Encuentra una ecuación que se ajuste a los valores de la tabla. (Sugerencia: a diferencia de las tablas que hemos manejado hasta el momento, esta vez harán falta dos operaciones aritméticas para obtener $d$ a partir de $t$). Escribe la ecuación.

Cuando tengas una propuesta de ecuación, podrás verificarla en el Apéndice 1.

La función tiempo-distancia para el recorrido de Citlalli sigue siendo una función lineal: su gráfica es una línea recta, su ecuación es lineal, en su tabla hay proporcionalidad (¿de verdad? en un momento analizaremos esta última afirmación con más detenimiento).

Ahora bien, a diferencia de las gráficas que hemos encontrado hasta el momento, esta recta no pasa por el origen. Esto se debe a que, en el instante $t = 0$, Citlalli no estaba a 0 metros de Pablo, sino a 60 metros de él. Este valor de la variable distancia, cuando la variable tiempo vale cero, se llama ordenada al origen.

> En una función lineal, la ordenada al origen es el valor de la variable dependiente cuando la variable independiente vale cero.
>
> Gráficamente, la ordenada al origen es el punto en donde la recta corta al eje de las ordenadas.

## Sistemas de referencia

Probablemente hayas escuchado una famosa frase según la cual "todo es relativo". En física, eso resulta en cierto modo correcto, y en el estudio del movimiento es una afirmación bastante importante.

La gráfica que representa el movimiento de Citlalli se dibujó tomando en cuenta datos de tiempo transcurrido y distancia recorrida… pero la distancia se estaba midiendo respecto a su amigo Pablo. Eso ocasionó que la gráfica no pasara por el origen y tuviera un aspecto como este:

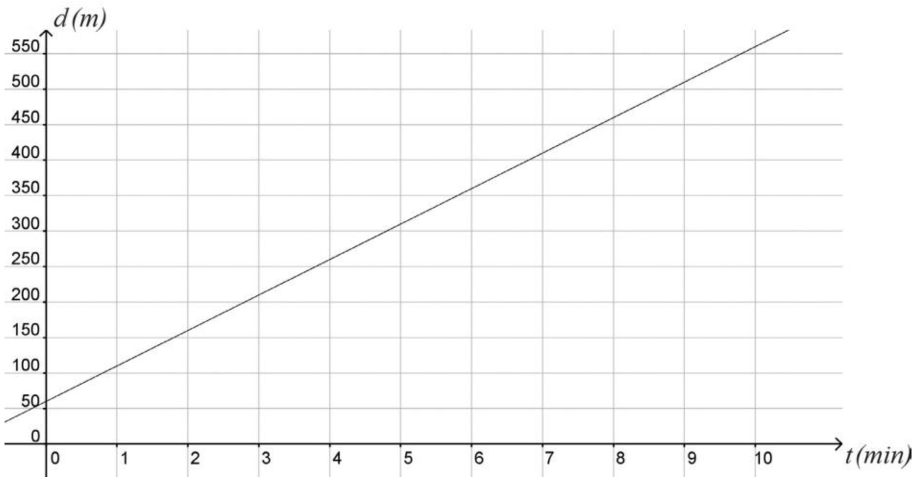



Figura 1.7

Pero ¿qué habría sucedido en caso de medir las distancias respecto a Rosario, la mamá de Citlalli, quien vive con ella y pasa la mañana en casa?

Justo antes de ponerse en camino ($t = 0$), la distancia $d$ entre Citlalli y su madre es cero metros. Luego, Citlalli sale de casa y comienza a avanzar 50 metros cada minuto. Esto nos dará una gráfica como esta:

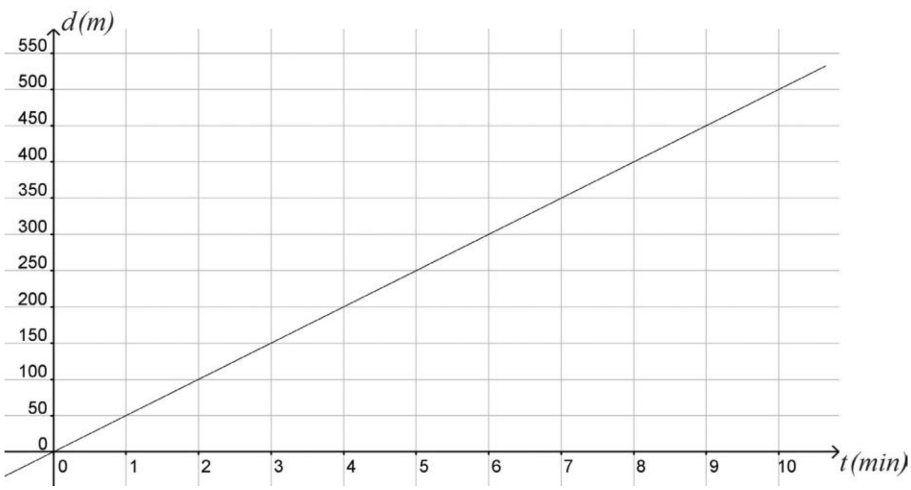



Figura 1.8

Esta vez la recta sí pasa por el origen.

Entonces, el aspecto de un movimiento puede cambiar dependiendo del sistema de referencia desde el cual se le esté observando.

**UN MOMENTO DE REFLEXIÓN**

Colocar el sistema de referencia de modo adecuado también puede ser importante para resolver el problema planteado al inicio de la unidad. Realiza un bosquejo sencillo de esa situación: una línea horizontal que represente el suelo, con el pueblo colocado en uno de sus extremos, y luego el avión volando en una trayectoria paralela al suelo, dirigiéndose al poblado. ¿Dónde será más conveniente colocar el origen del sistema de referencia? ¿En el aeropuerto desde el cual despega el avión? ¿En la plaza del pueblo, donde deben aterrizar los paquetes de ayuda? ¿En el punto desde el cual se dejan caer los paquetes? El problema es el mismo, pero resolverlo quizá se vuelva más sencillo colocando el sistema de referencia en el lugar correcto.

No dibujes aún el sistema de referencia, sólo agrega a tu bosquejo una breve explicación y sin dudar consérvalo en tu portafolio del estudiante, porque necesitarás regresar a él más adelante.

Los sistemas de referencia suelen representarse con la ayuda de un plano cartesiano; todo lo que hay que hacer es especificar en dónde se colocará el origen de ese plano. En el caso de Citlalli, su movimiento se verá de una manera si el origen del sistema de referencia es Pablo, y de otra distinta si es Rosario.

## ¿Proporcionalidad en el movimiento de Citlalli?

Volvamos a la tabla 1.3. Aquí está, ya completa:

| $t$ (min) | $d$ (m) |
|---|---|
| 0 | 60 |
| 1 | 110 |
| 2 | 160 |
| 4 | 260 |
| 5 | 310 |
| 6 | 360 |
| 7 | 410 |
| 8 | 460 |
| 10 | 560 |

Tabla 1.3

¿Son proporcionales los valores de las variables $d$ y $t$?

Es posible que no lo parezca a primera vista, pero en realidad esta tabla sí esconde proporcionalidad (ve al Apéndice 1 si quieres revisar con más detalle lo que entendemos por "proporcionalidad"):

18 Calcula los distintos incrementos que sufre $t$ al pasar de una fila a la siguiente (es decir, cuánto aumenta de una fila a la que sigue), y haz lo propio con los correspondientes incrementos para $d$. Calcúlalos para toda la tabla. ¿Hay proporcionalidad entre estos incrementos?

**Ejemplo**

Al pasar de la segunda fila a la tercera, el tiempo se incrementa en 1 minuto. Correspondientemente, la distancia se incrementa en 50 metros. La razón "incremento en distancia" / "incremento en tiempo" es

$$\frac{50 \text{ metros}}{1 \text{ minuto}} = 50 \text{ m/min}$$

Por otro lado, al pasar de la tercera fila a la cuarta, el tiempo se incrementa en 2 minutos, mientras que la distancia se incrementa en 100 metros. La razón "incremento en distancia" / "incremento en tiempo" es ahora

$$\frac{100 \text{ metros}}{2 \text{ minutos}} = 50 \text{ m/min}$$

Entonces ambas razones son iguales, y efectivamente hay proporcionalidad.

Te toca: calcula las razones "incremento en distancia" / "incremento en tiempo" para el resto de las filas, y determina si la proporcionalidad se mantiene o no.

Sólo sigue adelante cuando hayas realizado todos tus cálculos y hayas determinado si hay o no proporcionalidad.

Ahora vayamos un poco más lejos. Habrás notado que cuando dos cantidades son proporcionales, la razón que se forma entre ellas es una constante. Esta constante recibe el nombre de "constante de proporcionalidad" (consulta el Apéndice 4 para más detalles).

En este caso, ¿cuánto vale la constante de proporcionalidad?

Ese valor ¿lo habías visto antes en el movimiento de Citlalli?

En un movimiento rectilíneo uniforme, los incrementos de **tiempo** y de **distancia** son cantidades proporcionales.

La constante de proporcionalidad entre ambos incrementos es igual a la rapidez del objeto móvil.

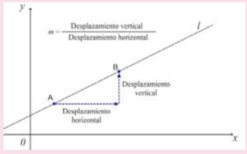
Al final de la sección *Representando funciones* habíamos advertido que en una tabla que representa un movimiento rectilíneo uniforme, los valores no siempre serían proporcionales de manera inmediata, pero que los incrementos de dichos valores sí lo serían, y acabas de comprobarlo.

La constante de proporcionalidad también recibe el nombre de **pendiente**, sobre todo cuando se trabaja con la gráfica que representa el movimiento en cuestión. En el caso de Citlalli, la gráfica que corresponde a su movimiento se muestra de nuevo a continuación:

En la gráfica, la constante de proporcionalidad —la pendiente— se puede calcular fácilmente, con un proceso completamente análogo al que se lleva a cabo cuando se tiene la tabla; por ejemplo, observa los puntos B y C. Para pasar de uno a otro, el tiempo debe aumentar en 2 minutos mientras que la distancia se incrementa en 100 metros. Entonces la pendiente vale, como ya sabíamos, 100 metros / 2 minutos = 50 m/min.

**glosario**

**Pendiente:** en Geometría analítica, la pendiente de una recta es un número que mide la "inclinación" de dicha recta. Si consideramos dos puntos que pertenezcan a la recta, la pendiente es la razón "**desplazamiento** vertical" / "desplazamiento horizontal" al ir de un punto al otro. Si esa razón es grande, la recta será muy "empinada", si es pequeña, será menos "empinada".




Los puntos A y B pertenecen a la recta l. Al ir de A hacia B, es necesario realizar un cierto "desplazamiento horizontal" y luego un determinado "desplazamiento vertical". La pendiente de la recta es la razón entre ambos desplazamientos.

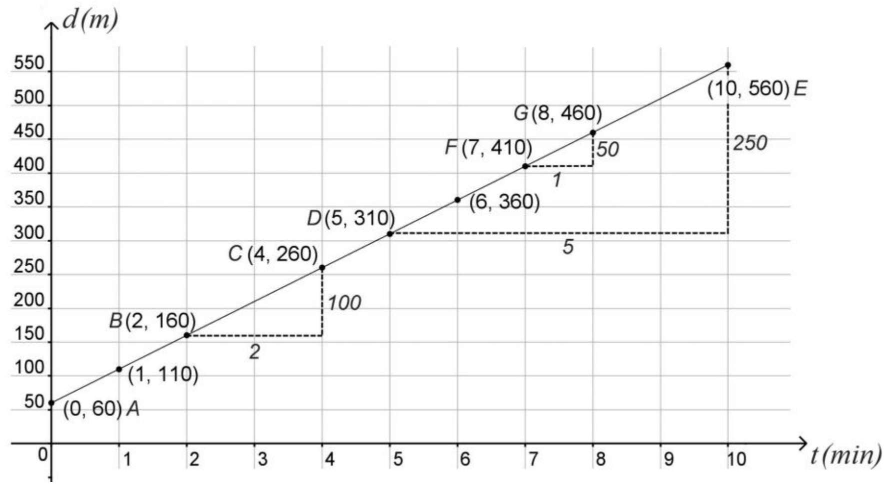



Figura 1.9

La razón de que a la constante de proporcionalidad se le llame "pendiente" es que su valor determina qué tan "empinada" será la recta, de manera que una pendiente grande dará una recta muy "empinada", y viceversa.

## Citlalli de regreso

Cuando Citlalli sale de su clase de inglés, va a visitar a Pablo. La gráfica siguiente representa el movimiento de la chica, visto desde el sistema de referencia de Pablo:

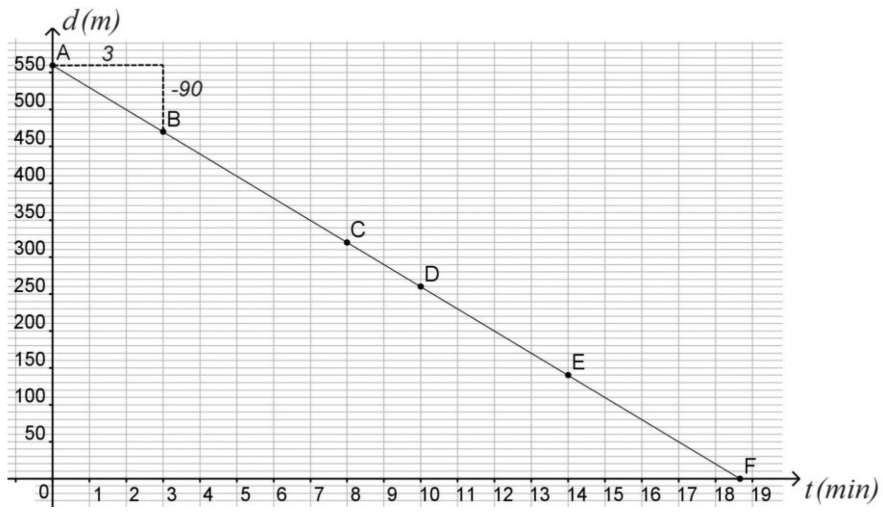



Figura 1.10

Calculemos la rapidez de Citlalli cuando va del punto A al B. Para ir de uno a otro, ella recorre 90 metros (observa la figura 1.10 cuidadosamente) mientras pasan 3 minutos. Entonces su rapidez es

$$v = \frac{-90\ \text{metros}}{3\ \text{minutos}} = -30\ \text{m}/\text{min}$$

(para representar a la rapidez usaremos la letra $v$, de "velocidad"; como veremos más adelante, rapidez y velocidad son dos conceptos diferentes, pero por el momento podemos considerarlos equivalentes).

¿Por qué se tomó negativa la distancia que recorre Citlalli en este tramo? La razón es que, como se puede deducir observando la gráfica, al avanzar el tiempo esa distancia no aumenta sino disminuye (lo que significa que la chica se está acercando a casa de Pablo). Cuando una cantidad aumenta su valor su incremento es positivo, pero si lo disminuye, el incremento se considera negativo.

Esto tiene como consecuencia que su rapidez -la pendiente de la función- sea también negativa. Gráficamente, la recta está "dirigida" hacia abajo.

**19** Observa la gráfica y responde:

I. ¿Cuánto vale la ordenada al origen en esta función?

II. Ahora, encuentra la ecuación que representa el movimiento de Citlalli rumbo a la casa de Pablo (sugerencia: recuerda que la ecuación deberá tener la forma , en donde $v$ es la rapidez de quien se mueve mientras $d_0$ es su posición inicial respecto al origen del sistema de referencia).

Cuando tengas tu ecuación lista, empléala para responder:

III. ¿En cuánto tiempo llega Citlalli a casa de Pablo?

IV. ¿Cuántos minutos deben transcurrir para que Citlalli se encuentre a 100 metros de la casa de Pablo?

V. Cuando Citlalli lleva 11 minutos de camino, ¿a qué distancia está de la casa de su amigo?

Puedes auxiliarte con el siguiente ejemplo.

**Para saber más**

Despejar, consiste en realizar una serie de operaciones matemáticas a una ecuación con el fin de que la incógnita (valor que no conocemos y que es necesario determinar) quede "sola" en cualquiera de los miembros de la ecuación. Una forma de lograrlo es moviendo todos los términos conocidos de la ecuación a uno de los miembros de la ecuación, y todos los términos que contengan incógnitas al miembro restante. Es importante saber que al "mover" un término desde un miembro de la ecuación al otro, pasa efectuando la operación contraria. Es decir, si el término está en el primer miembro de la ecuación restando y deseas pasarlo al segundo miembro, debes pasarlo sumando. En el caso de que al terminar de despejar la incógnita, el término quede expresado en forma de producto, ya sea 2x, 10x, 15x o algo por el estilo, simplemente se deja la incógnita en el miembro en que esté y el número que la estaba multiplicando se pasa al otro miembro dividiendo.

## Ejemplo

Si la ecuación fuera

$$d = -20t - 50$$

y quisiéramos saber cuánto tiempo debe transcurrir para que la distancia $d$ valga 10 metros, sólo necesitamos sustituir el valor $d = 10$ en la ecuación y despejar $t$:

| | |
|---|---|
| $10 = -20t - 50$ | Esta es la ecuación, con el valor de $d$ ya sustituido |
| $\Rightarrow 10 - 50 = -20t + 50 - 50$ | Se resta 50 a ambos lados de la ecuación. |
| $\Rightarrow -40 = -20t$ | En el miembro izquierdo, 10 menos 50 da -40. En el derecho, 50 menos 50 da cero, y ya no se escribe. |
| $\Rightarrow \frac{-40}{-20} = \frac{-20t}{-20}$ | Se dividen entre -20 ambos miembros de la ecuación. |
| $\Rightarrow 2 = t$ | En el miembro izquierdo, -40 entre -20 da 2. En el derecho, -20 entre -20 da 1, y sólo se escribe la $t$.<br>Hemos terminado. |

Ahora usa estas ideas para responder las preguntas planteadas; verifica tus respuestas en el Apéndice 1 al final del libro. Asegúrate de hacerlo sólo cuando hayas propuesto una respuesta que te deje satisfecho(a) para todas las preguntas.

**20** Una estación del Servicio Sismológico Nacional detecta un movimiento telúrico cuyo epicentro se encuentra en un punto frente a las costas de Guerrero, a 203 km de distancia. Compartiendo información con otras estaciones, se logra determinar que las ondas se propagan a una velocidad de 8 km/s.

I. Suponiendo que se mueven a velocidad constante, escribe una ecuación que exprese su distancia a la estación, en función del tiempo transcurrido desde que se originaron en el epicentro.

II. Usa tu ecuación para predecir el momento en que las ondas se encontrarán a 50 km de distancia de la estación.

III. ¿En cuánto tiempo alcanzarán las ondas la posición de la estación?

IV. ¿A qué distancia de la estación se encontraban las ondas 10 segundos después de haberse originado en el epicentro?

Pasa a la siguiente sección cuando hayas terminado.

## Recapitulando

La ecuación que encontraste para el movimiento de Citlalli tiene la forma

$$d = vt + d_0$$

Esta ecuación es muy importante, recuérdala bien. En ella, las variables son $d$ (la distancia recorrida) y $t$ (el tiempo transcurrido). Por otro lado, tanto $v$ como $d_0$ son constantes; $v$ es la rapidez del movimiento (la pendiente de la gráfica, que se calcula dividiendo los incrementos de distancia entre los incrementos correspondientes de tiempo) mientras que $d_0$ es la posición inicial (la ordenada al origen).

Esta ecuación es importante porque cualquier función lineal se puede escribir en esa forma; además, si se conoce esa ecuación se puede saber de inmediato cuál es la rapidez del movimiento (identificando el valor de $v$) y cuál era la posición desde la que el objeto móvil comenzó a moverse (identificando el valor de $d_0$).

**Ejemplo**

Supongamos que el movimiento de un tren en un tramo recto de la vía queda descrito por la ecuación $d = 70t + 10$, en la que la distancia $d$ se mide en kilómetros y el tiempo $t$ se mide en horas. Comparando esta ecuación con $d = vt + d_0$ vemos inmediatamente que la rapidez del tren es de 70 km/h, y que su movimiento comenzó a 10 km del origen del sistema de referencia.

21

I. ¿En cuánto tiempo ese tren se encuentra a 100 km del origen del sistema de referencia?

II. ¿Y a 150 km?

III. ¿A qué distancia se encuentra cuando han transcurrido 5 horas?

## Otra clase de movimiento

Un automóvil está detenido frente a un semáforo de la avenida Mariano Abasolo, en la ciudad de Saltillo, Coahuila. El semáforo cambia al verde, y el automóvil arranca. Su movimiento queda descrito por la gráfica siguiente:

Estás trabajando para construir e interpretar gráficas de desplazamiento-tiempo, velocidad-tiempo para diferenciar tipos de movimientos y relacionarlos a situaciones de tu entorno.

22

El auto se está moviendo en línea recta a lo largo de la avenida. ¿Por qué entonces la gráfica no es una línea recta?

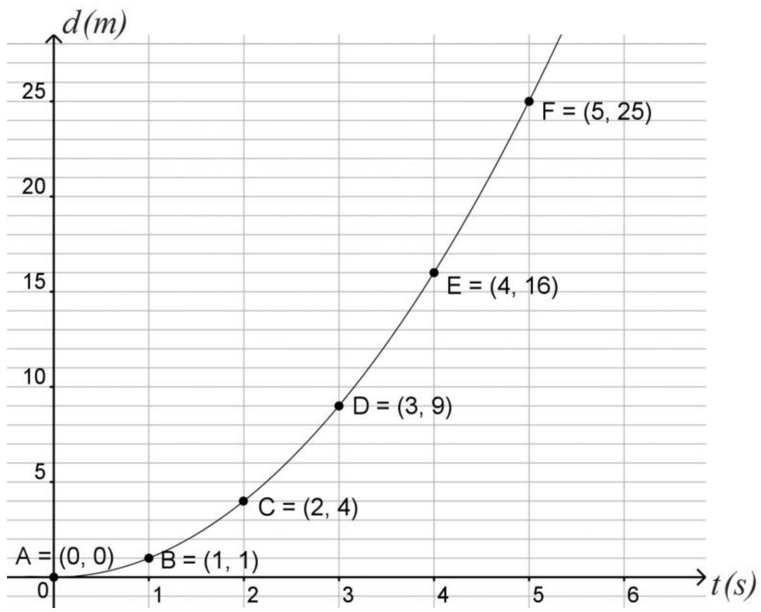



Figura 1.11

I. ¿Qué ocurre en su movimiento que hace que la gráfica no sea recta?

II. ¿De qué manera debería moverse para que lo fuera?

III. A parte del hecho obvio de que en los movimientos anteriores las gráficas eran rectas y en este caso no lo son, ¿cuál es la gran diferencia entre el movimiento de este auto y los que habíamos estudiado anteriormente?

Analiza cuidadosamente la gráfica. En secciones anteriores has dibujado gráficas a partir de tablas; aquí puedes hacer el proceso inverso, construir una tabla a partir de la gráfica. Hazlo y observa con cuidado los datos que obtengas. Empléalos para ayudarte a responder las preguntas anteriores.

IV. Luego completa el siguiente cuadro comparativo con tus observaciones:

| | Movimiento rectilíneo uniforme | Nuevo tipo de movimiento |
|---|---|---|
| Gráficas tiempo-distancia | Rectas | Curvas |
| Tablas tiempo-distancia | Incrementos proporcionales | |
| Ecuaciones tiempo-distancia | | |
| Rapidez | | |

Confronta tus respuestas con tu experto de confianza.

Luego, realiza una búsqueda (en Internet o en medios físicos) y averigua el nombre que se le da a esta clase de movimiento. Pasa a la siguiente sección en cuanto tengas esta información.

## El cambio del cambio

23 Si no lo has hecho aún, calcula con base en la gráfica la rapidez del automóvil al ir del punto A a B, de B a C, de C a D, de D a E y de E a F.

¿Qué tanto cambia la rapidez de un intervalo al siguiente?

Estás trabajando para identificar variables y constantes en las relaciones y funciones que expresan el movimiento de los cuerpos, para diferenciar tipos de movimiento.

Continúa en cuanto tengas una respuesta a esta pregunta. La solución correcta está en el Apéndice 1, pero no detengas tu aprendizaje yendo a verla antes de haber intentado obtenerla por tu cuenta.

El cambio en la velocidad por unidad de tiempo recibe el nombre de **aceleración**. Esto se escribe

$$\text{Aceleración} = \frac{\text{Cambio en la velocidad}}{\text{Tiempo que toma el cambio}}$$

Observa que hasta ahora no habíamos hablado de “velocidad”, sino de “rapidez”. Este cambio de lenguaje, que podría parecer inofensivo, es bastante importante en Física.

En el lenguaje informal, se suele usar rapidez y velocidad como sinónimos; sin embargo, hablando en forma estricta existe una diferencia entre ambos conceptos: si sólo decimos que un objeto se mueve a 10 m/s, estamos especificando su rapidez. Pero si decimos que se mueve a 10 m/s en dirección sur, estamos dando su velocidad.

Cuando se especifican tanto la rapidez como la dirección de un movimiento, se está hablando de su velocidad.

Esto significa que si la velocidad de un objeto es constante, también lo será la rapidez, pero lo contrario no es necesariamente cierto.


Piensa en distintos ejemplos en los que la rapidez se mantenga constante, pero la velocidad no (recuerda, la velocidad incluye tanto a la rapidez como a la dirección del movimiento). Completa el cuadro con tus ejemplos:

| Ejemplo de movimiento en el que la rapidez es constante pero la velocidad no lo es | Razones por las que la rapidez es constante pero la velocidad no lo es |
|---|---|
| Un automóvil que toma una serie de curvas manteniendo una rapidez de 50 km/h. | La rapidez es constante porque el automóvil recorre la misma distancia en el mismo tiempo; la velocidad no lo es porque el movimiento cambia continuamente de dirección. |
| | |

| **Ejemplo de movimiento en el que la rapidez es constante pero la velocidad no lo es** | **Razones por las que la rapidez es constante pero la velocidad no lo es** |
|---|---|
| Un niño hace girar sobre su cabeza un objeto de plástico amarrado a una cuerda. | La rapidez del objeto de plástico se mantiene constante si el niño no lo hace girar a veces más lento y a veces más rápido; sin embargo, la velocidad cambia de cualquier manera porque el objeto se mueve en círculos, lo que significa que cambia continuamente su dirección. |
| | |
| | |

Así que la diferencia principal entre velocidad y rapidez es que la primera especifica la dirección en la que ocurre el movimiento; por el momento seguiremos estudiando movimientos rectilíneos, porque los cambios de dirección no los necesitamos aún, y podemos hablar de rapidez y velocidad como si fueran sinónimos. Pero es importante que desde ahora seas consciente de que no lo son.

Volvamos a la aceleración:

En el automóvil de la sección anterior, se deduce que está acelerando, pues como habrás notado, su rapidez está cambiando. La aceleración de un objeto es una medida de qué tan rápido cambia su rapidez (piensa con cuidado en esta frase).

Puedes notar que cada segundo, la velocidad del automóvil se incrementa en 2 metros por segundo. Esa es su aceleración (el cambio en la velocidad por unidad de tiempo). Además esta aceleración sí es constante: 2 metros por segundo cada segundo, o lo que es lo mismo, 2 metros por segundo por segundo.

Nota que el doble uso de “por segundo” viene del hecho de que la unidad de tiempo interviene dos veces: una vez en la velocidad, y otra más en el intervalo de tiempo en el que ocurre el cambio de velocidad. Esto se abrevia escribiendo metros/segundo$^2$, o empleando abreviaturas, m/s$^2$.

> Si la distancia se expresa en metros y el tiempo en segundos, las unidades de la aceleración serán m/s$^2$

Entonces, la aceleración de este automóvil es de 2 $m/s^2$.

Reflexiona sobre la naturaleza de la aceleración. ¿Por qué esta sección lleva el título "el cambio del cambio"?

## Ecuación del movimiento uniformemente acelerado

Estás trabajando para relacionar las variables de un proceso natural para la construcción de modelos matemáticos que permitan su interpretación y para resolver de manera analítica situaciones problemáticas que involucren el movimiento rectilíneo por medio de herramientas matemáticas.

En la sección *Recapitulando* se presentó la ecuación que describe un **movimiento rectilíneo uniforme**. La ecuación es

$d = vt + d_0$ *Ecuación del movimiento rectilíneo uniforme*

En el caso de un movimiento de ese tipo, la velocidad es constante. Pero si ese no es el caso, la ecuación anterior debe tomarlo en cuenta.

25 Empleando la noción de rapidez promedio y la definición de aceleración, un poco de Álgebra te permitirá obtener la ecuación que corresponde a un movimiento con aceleración constante. Necesitarás comenzar por considerar dos aspectos:

- La expresión para la rapidez promedio de un objeto que comienza moviéndose con una rapidez inicial $v_0$ y termina haciéndolo con una rapidez final $v_f$. Esta expresión es

$$v_m = \frac{v_0 + v_f}{2} \qquad (1.1)$$

- La expresión para la aceleración de un objeto que pasa de una rapidez inicial $v_0$ a una rapidez final $v_f$ en un tiempo $t$, que es

$$a = \frac{v_f - v_0}{t} \qquad (1.2)$$

Ahora sigue estos pasos:

- Reescribe la ecuación $d = vt + d_0$, colocando la expresión para la rapidez promedio (1.1) en lugar de la rapidez $v$.
- A parte, despeja la rapidez final de la ecuación (1.2). Sustituye la expresión resultante en la ecuación que obtuviste en el paso anterior.
- Simplifica todo lo posible. Debes llegar a

$$d = \frac{1}{2}a^2t + v_0t + d_0$$

la cual es la ecuación que describe un movimiento con aceleración constante.

Comparte tus desarrollos y resultados con tu experto de confianza. Asegúrate de comprender cada uno de los pasos que te llevaron a $d = \frac{1}{2}a^2t + v_0t + d_0$

$d = vt + d_0$ *Ecuación del movimiento rectilíneo uniforme*

$d = \frac{1}{2} a^2t + v_0t + d_0$ *Ecuación del movimiento uniformemente acelerado*

son fundamentales en el estudio del movimiento; tómate el tiempo de aprendértelas y más aún, de comprender cómo se llegó a ellas y de entender el significado de cada uno de sus componentes.


I. Vuelve ahora al movimiento del automóvil de la sección *Otra clase de movimiento*. Aplica la ecuación del movimiento uniformemente acelerado,

$$d = \frac{1}{2} a^2t + v_0t + d_0$$

a ese movimiento en particular; conoces el valor de su aceleración y también el de su velocidad inicial. Coloca tu sistema de referencia de manera que la posición inicial del auto sea cero (¿dónde debes colocarlo?).

Escribe la ecuación que resulta de tomar en cuenta todas estas características.

II. Emplea la ecuación para determinar a qué distancia se encuentra el automóvil luego de 16 segundos.

Revisa la ecuación correcta en el Apéndice 1, sólo cuando hayas propuesto una ecuación de la que estés seguro(a).

Emplea un procesador de textos, algunas hojas de papel o un cuaderno para escribir el procedimiento que seguiste. Incluye las fuentes en las que hallaste las ecuaciones necesarias (asegúrate de consultar al menos tres fuentes distintas). Divide el documento en dos partes: en la primera se abordará el desarrollo de la ecuación $d = \frac{1}{2} a^2t + v_0t + d_0$; en la segunda, la ecuación que corresponde al automóvil de la sección *Otra clase de movimiento*. Titula el documento "Ecuación del movimiento uniformemente acelerado".

La ecuación del movimiento uniformemente acelerado es:

$$d = \frac{1}{2} a^2t + v_0t + d_0$$

que describe un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, es una ecuación cuadrática (ve al Apéndice 5 para más detalles al respecto). Tal y como sucedía con la ecuación del movimiento rectilíneo uniforme (sección *Recapitulando*), esta ecuación puede servirte para calcular la distancia recorrida por un móvil acelerado si se conoce el tiempo que ha estado moviéndose, y viceversa. La diferencia es precisamente que ahora la ecuación es cuadrática (y no lineal como en el caso del

**Gestión del aprendizaje**

¿Dónde colocar un sistema de referencia?

El origen de un sistema de referencia se puede colocar donde se desee; lo mejor es colocarlo de manera tal que la descripción de la situación en cuestión se vuelva lo más sencilla posible. Por ejemplo, si pensamos en describir al movimiento de la Tierra alrededor del Sol, podríamos colocar el origen del sistema de referencia en la propia Tierra (pero en ese caso parecería que quien se mueve no es la Tierra sino el Sol, problema que confundió a la humanidad durante siglos), en algún punto entre la Tierra y el Sol (lo cual complicaría las cosas, porque el Sol también se está moviendo respecto al centro de la galaxia, así que desde este sistema de referencia veríamos que tanto la Tierra como el Sol se mueven) o en el Sol (que quizás sería la mejor opción, pues desde ese sistema de referencia el único objeto móvil sería la Tierra).

movimiento uniforme), por lo que será necesario que retomes algunas técnicas que permiten resolver ese tipo de ecuaciones. En la siguiente sección abordaremos una de esas técnicas. Por el momento, realiza la actividad que se plantea a continuación.

**27** Vuelve a la ecuación del automóvil que acabas de escribir. Tomando en cuenta que una potencia se puede despejar mediante el empleo de la raíz cuadrada, responde:

I. ¿Qué distancia habrá recorrido después de 3 segundos de recorrido?

II. ¿Luego de 10 segundos?

III. ¿En cuánto tiempo habrá recorrido 500 metros desde su posición inicial?

IV. ¿y 700 metros?

## Ejemplo

Considera la ecuación

$$2x^2 - 8 = 0$$

En la que queremos despejar a *x*. El despeje puede comenzar usando técnicas ya conocidas:

| | |
|---|---|
| $2x^2 - 8 = 0 + 8$ | Sumamos 8 a ambos lados de la ecuación |
| $2x^2 - 8$ | Simplificamos |
| $\frac{2x^2}{2} = \frac{8}{2}$ | dividimos entre 2 ambos lados de la ecuación |
| $x^2 = 4$ | Simplificamos |

En este punto, sólo queda eliminar la potencia para que *x* quede completamente despejada. Si has reflexionado al respecto, te habrás dado cuenta de que los despejes funcionan aplicando operaciones inversas: los elementos que aparecen *sumando* se cancelan *restándolos* a ambos lados de una ecuación, los que aparecen *multiplicando* se cancelan *dividiendo* entre ellos a ambos lados de la ecuación.

Pues bien, para eliminar la potencia cuadrada hace falta aplicar su operación inversa a ambos lados de la ecuación; la operación inversa de la potencia cuadrada es la raíz cuadrada, de modo que para terminar el despeje se tendrá

$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$ Obtenemos la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación

$x = \pm 2$

Así que una potencia se puede eliminar con la ayuda de la raíz correspondiente.

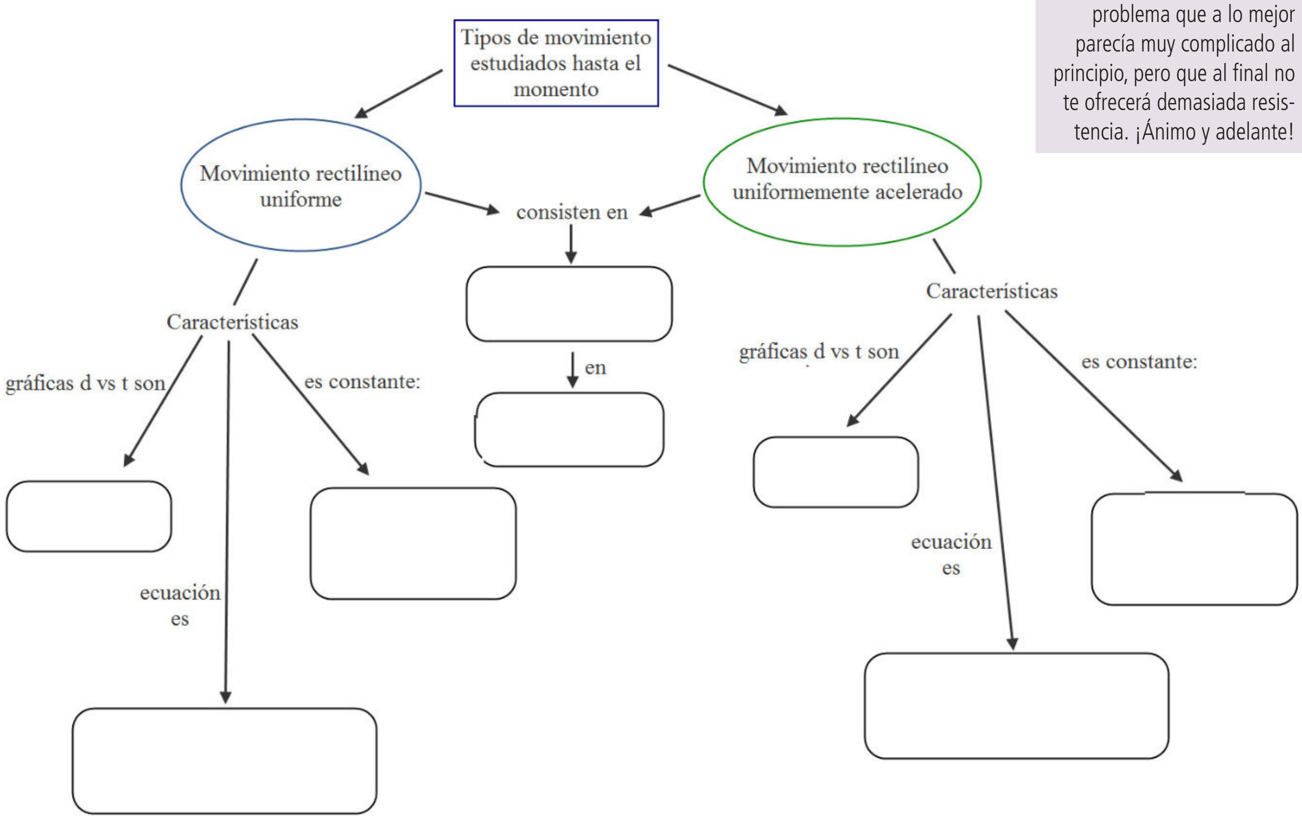
Es importante notar que la raíz cuadrada de un número siempre lleva los dos signos; si reflexionas sobre la naturaleza de la raíz cuadrada (¿qué es la raíz cuadrada de un número?) descubrirás la razón.

**UN MOMENTO DE REFLEXIÓN**

Quizás sospechabas con anterioridad que el movimiento de los paquetes de ayuda al caer desde el avión hacia la plaza del pueblo, en el problema del inicio de la unidad, no sería rectilíneo uniforme. De ser así, tenías razón: se tratará de un movimiento acelerado, por razones que estudiarás a continuación. Poco a poco estás desarrollando habilidades y herramientas que te permitirán atacar un problema que a lo mejor parecía muy complicado al principio, pero que al final no te ofrecerá demasiada resistencia. ¡Ánimo y adelante!

Consulta con tu experto de confianza la manera correcta de responder estas preguntas. Sigue adelante sólo cuando las hayas resuelto todas. Las soluciones correctas están en el Apéndice 1, pero como es usual, no te sugerimos revisarlas sino hasta que las hayas encontrado por tu cuenta.

Completa ahora el siguiente mapa conceptual, relativo a los dos tipos de movimiento que hemos estudiado hasta el momento; emplea para ello las opciones de respuesta que se encuentran en la parte inferior del mapa:




Desplazamiento de un objeto

cuadrática: $d = \frac{1}{2} a^2 t + v_0 t + d_0$

La velocidad (cambio de posición por unidad de tiempo)

La aceleración (cambio de velocidad por unidad de tiempo)

Rectas

lineal: $d = vt + d_0$

línea recta

Curvas

# ¡Fuera abajo!

28 Todo el mundo sabe lo que sucede si tomas un objeto, lo levantas a cierta altura sobre el piso y lo sueltas. Por razones que parecerían obvias, esta clase de movimiento se conoce como "**caída libre**". Sin embargo, en la vida cotidiana es difícil que un cuerpo llegue a estar en una verdadera "caída libre": eso significaría que nada, absolutamente nada, se opone a su movimiento... y en la superficie de nuestro planeta eso es particularmente difícil.

¿Por qué?

Reflexiona al respecto y coméntalo con más personas; si alguna de ellas está estudiando el bachillerato también, sería estupendo.

Sólo continúa cuando te hayas formado una opinión sobre la cuestión anterior.

29 En esta actividad, experimentarás un poco con el movimiento de caída libre. Para ello, toma un objeto pequeño (como una pelota de golf, o de esponja) y con una cinta métrica mide hasta qué altura puedes levantarlo. Si lo crees necesario, pide la ayuda de alguien para realizar la medición.

La pregunta es la siguiente: si ahora sueltas el objeto ¿cuánto tardará en llegar al suelo?

Básicamente tienes dos maneras de averiguar eso. Primera, podrías tomar un cronómetro y medir experimentalmente el tiempo en el que el objeto llega al suelo. Segunda, podrías calcular teóricamente este tiempo. Bueno, ¿por qué no ambas?

Antes que nada, reflexiona, investiga en Internet (algunos sitios útiles pueden ser http://www.educaplus.org/movi/4_2caidalibre.html, o http://www.rena.edu.ve/cuartaEtapa/fisica/Tema1b.html) o en textos impresos (cualquier texto de Física para bachillerato servirá) si es necesario, y contesta:

I. El movimiento del objeto cuando lo sueltes, ¿será acelerado o no? ¿Por qué?

II. En caso afirmativo, ¿qué es lo que hace que acelere?

III. ¿Cuánto vale esta aceleración?

Estas tres primeras preguntas son de importancia capital para comprender los temas siguientes. No continúes mientras no hayas conseguido responderlas a detalle. Las respuestas correctas están en la sección correspondiente al final del libro, pero haz todo lo posible por responderlas por tu cuenta antes de ir para allá.

Continúa:

IV. Si simplemente sueltas el objeto, sin darle ningún impulso hacia arriba ni hacia abajo, ¿cuál sería su velocidad inicial?

Responder las siguientes preguntas requiere que primero elijas un sistema de referencia para describir la situación. Mira la figura 1.12:

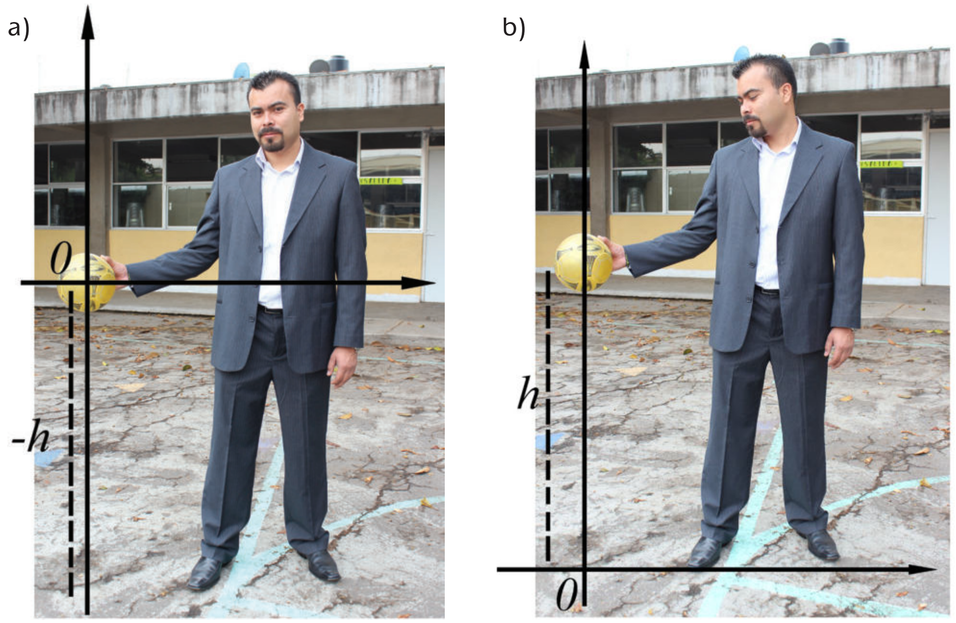



Figura 1.12 a) El sistema de referencia colocado de modo que su origen coincide con la posición inicial del objeto que sostienes. b) El sistema de referencia colocado de modo que su origen está en el suelo, directamente debajo del objeto que sostienes.

Elige una de las dos opciones. La posición inicial del objeto dependerá de qué opción hayas elegido.

V. ¿Cuál es su posición inicial?

VI. Escribe la ecuación que describe el movimiento de este objeto; la respuesta a la pregunta (I) de esta actividad implica que este es un movimiento uniformemente acelerado, por lo que la ecuación que debes emplear es

$$d = \frac{1}{2}a^2t + v_0t + d_0$$

La respuesta a la pregunta (III) te dará el valor de la aceleración $a$, mientras que la respuesta a la pregunta (IV) te dará el valor de la velocidad inicial $v_0$. La correspondiente a la pregunta (V) te proporcionará el valor de la posición inicial $d_0$. Observa además que este último dependerá de la posición en la que hayas colocado el origen de tu sistema de referencia; refiérete a la figura 1.12. Además, recuerda que la dirección "arriba" se suele considerar positiva, mientras que "abajo" suele considerarse negativa; ¿por qué es esto importante? Porque la aceleración de la gravedad apunta hacia abajo, y necesitas determinar si eso significa que dicha aceleración será positiva o negativa dentro de tu sistema de referencia).

VII Usa tu ecuación para calcular el tiempo que le tomará llegar al suelo. Sugerencia: cuando llegue al suelo, ¿cuál será el valor de $d$, de acuerdo con la posición de tu sistema de referencia? Mira de nuevo la figura 1.12. Recuerda que una incógnita elevada al cuadrado se puede despejar empleando la raíz cuadrada; en la actividad 27 de la sección anterior realizaste un despeje semejante, retoma ese procedimiento para empleado aquí. Quizá también sería conveniente que recuperes lo estudiado en el módulo *Representaciones simbólicas y algoritmos*.

Una vez que hayas encontrado el resultado anterior, usa un cronómetro para medir el tiempo que el objeto tarda realmente en caer. Realiza la medición un mínimo de cinco veces, anotando todos tus resultados, y obtén su promedio.

¿Coinciden los resultados experimentales con los teóricos?

---

Discute tus descubrimientos con tu experto de confianza o acude al Servicio de Asesoría Académica que ofrece la Preparatoria Abierta.

Luego elabora un reporte en el que describas tus procedimientos con toda la claridad y detalle posibles. Incluye una sección de conclusiones en la que establezcas en qué medida los resultados experimentales coinciden con lo predicho por la teoría, e incluye una reflexión de tu parte al respecto.


Emplea la ecuación del movimiento uniformemente acelerado,

$$d = \frac{1}{2}a^2t + v_0t + d_0$$

junto con la definición de aceleración y las técnicas que empleaste en la actividad anterior para responder las preguntas siguientes; ignora en todos los casos el efecto de la

**Gestión del aprendizaje**

Cuando se realiza un experimento, usualmente interesa realizar mediciones de determinadas variables físicas (distancias, tiempos, fuerzas,…) para obtener información sobre su comportamiento bajo ciertas circunstancias.

Al respecto, se presenta un problema: es prácticamente imposible realizar una medición perfecta, es decir, una que permita conocer con absoluta precisión y exactitud el valor de esas cantidades que se quieren medir. Las razones son múltiples (limitaciones de los instrumentos de medida, error humano al realizar las mediciones, limitaciones en el diseño del experimento,…)

Por ello, es recomendable realizar la medición varias veces, y obtener su promedio. De esa manera, ante la imposibilidad de conocer exactamente el valor de una cantidad, se puede al menos saber alrededor de qué valor podríamos esperar que se encuentre dicha cantidad.

fricción del aire (que en la vida real, se opondría a la aceleración de la gravedad, modificando con ello la ecuación). Considera además que la velocidad inicial en todos los casos es cero. Desarrolla los ejercicios en tu cuaderno.

I. ¿Desde qué altura debería saltar un paracaidista para llegar al suelo 10 segundos después?
II. ¿Y desde qué altura debería hacerlo para llegar al suelo 20 segundos después?
III. Averigua a qué altura sobre el suelo se encuentra la azotea de la Torre Mayor de la Ciudad de México. ¿En cuánto tiempo llegaría al suelo un objeto que se deja caer desde ahí?
IV. ¿Cuál sería la velocidad de ese objeto al llegar al suelo?
V. Dejas caer una piedra al fondo de un barranco. Alcanzas a ver cómo la piedra choca con el suelo 3 segundos después. Suponiendo que no le diste a la piedra ninguna velocidad inicial, determina la profundidad de ese barranco.
VI. ¿Cuánto tiempo tarda un clavadista olímpico en llegar al agua, si se lanza desde la plataforma de 10 m?

**UN MOMENTO DE REFLEXIÓN**

Supón que en la situación planteada al inicio de la unidad, el avión vuela a una altura de 3000 m sobre el suelo. Si en lugar de un avión, los paquetes de ayuda se dejaran caer desde un helicóptero que se encontrara estático a esa altura, ¿cuál sería la ecuación que describiría su caída? Escríbela. Por el momento, considera que su velocidad inicial es cero.

La diferencia entre lanzar los paquetes desde un helicóptero estático y un avión en pleno vuelo es que en el segundo caso, la velocidad inicial de los paquetes no es cero, de modo que quizás la ecuación que escribiste deberá modificarse. Más adelante veremos exactamente cómo será esta modificación. Por ahora, añade la ecuación que escribiste a tu portafolio del estudiante.

Una vez que hayas trabajado a detalle con estas preguntas y tengas respuestas para cada una de ellas, podrás compararlas con las que se ofrecen en el Apéndice 1.

Resolver ecuaciones cuadráticas como la involucrada en esta actividad te será muy útil más adelante, así que registra por escrito todos tus procedimientos, razonamientos, desarrollos y resultados con detalle, y ten el documento a la mano durante el resto del módulo.

Hay diferentes factores que hacen que en la cotidianeidad, los objetos no caigan exactamente como lo predice la ecuación $d = \frac{1}{2}\,a^2t + v_0t + d_0$. ¿Qué factores crees que sean estos? ¿Cómo harías para minimizarlos y lograr valores experimentales que coincidan con lo predicho por la teoría?

Los científicos se preocupan por lograr lo opuesto: mejorar la teoría para que tome en cuenta más y más factores de la realidad, de modo que las predicciones teóricas se aproximen de manera cada vez mejor a lo que se observa en la naturaleza.

## Disparo al cielo azul


En esta actividad experimental analizarás otro movimiento acelerado, que por razones que te quedarán claras en un momento, se conoce como "**tiro vertical**". Pide a alguien que te ayude a realizar las mediciones necesarias y pónganse manos a la obra:

Estás trabajando para utilizar software matemático para la representación e interpretación del movimiento rectilíneo.

**Materiales**

- 1 globo pequeño
- 1 botella de plástico de boca ancha.
- 1 cronómetro
- 1 pelota pequeña, que quepa en la boca de la botella de plástico.
- 1 cuchillo o tijeras que puedan cortar plástico.
- 1 cinta métrica.
- 1 computadora con acceso a Internet

**Procedimiento**

Con cuidado, corta transversalmente la botella cerca de la boca. Terminarás con la botella dividida en dos partes, la inferior y la superior. Quédate con la parte superior.

Ajusta la boca del globo a la boca de la botella.



Cuando coloques la pelota dentro de este aparato, la jales a través del globo y la sueltes, ésta saldrá disparada (ten cuidado de no dañar a nadie).

Ahora sostén el aparato a una altura sobre el suelo que te resulte cómoda. Pide la colaboración de alguien para que te ayude a medir esta altura con la cinta métrica.

Apunta directamente hacia arriba (es muy importante que el tiro sea lo más vertical posible). Tira del globo y suéltalo en el mismo instante en el que tu ayudante echa a andar el cronómetro: deben medir el tiempo que la pelota tarda en llegar al suelo.

Realicen sus mediciones un mínimo de cinco veces y obtén un valor promedio para el tiempo de vuelo de la pelota. Es muy importante que procures sostener el aparato a la misma altura, y dar a la pelota el mismo impulso en todas las mediciones.

Registra el tiempo promedio que hayas obtenido, lo necesitarás más adelante.


Análisis

El objetivo de este análisis es llegar a escribir la ecuación que representa el movimiento de la pelota, para luego emplearla en el cálculo de distintas cantidades involucradas en él. Para ello, hace falta reflexionar en los siguientes aspectos:

De manera similar a lo que ocurría en la sección *¡Fuera abajo!*, la pelota está bajo la influencia de la gravedad, que le imprime una aceleración hacia abajo de aproximadamente 9.8 $m/s^2$. De acuerdo con ello,

I. ¿Qué tipo de movimiento es este?

II. ¿Cuál es la ecuación que lo describe?

Por otro lado, este movimiento en realidad involucra dos fases: una en la que la pelota se dirige hacia arriba, y otra en la que se dirige hacia abajo. En cada fase, el movimiento ocurre en sentidos opuestos, y para escribir correctamente la ecuación es necesario distinguir ambos de alguna manera. Lo más sencillo es emplear un sistema de referencia en el que especifiques cuál es la dirección (abajo o arriba) que considerarás positiva; la otra se considerará negativa.

Además es necesario que determines en dónde colocarás el origen de este sistema de referencia. Podrías colocarlo en cualquier lugar, pero en este caso hay dos opciones particularmente útiles: colocarlo en el suelo (directamente debajo del aparato), o colocarlo justo en la posición desde la que sale disparada la pelota.

No continúes mientras no hayas considerado y tomado una decisión respecto a todo lo anterior.

III. Ahora llena el cuadro siguiente, señalando qué elementos de este movimiento son conocidos, cuánto valen, y qué elementos no se conocen (al llenar el cuadro, toma en cuenta que la aceleración de la gravedad está dirigida hacia abajo; esto significa que dependiendo de lo que hayas decidido al introducir tu sistema de referencia, tendrás que designarla como positiva o negativa; algo similar —pero en sentido contrario— ocurrirá con la velocidad inicial):

| Elemento | Desconocido | Conocido | Valor |
|---|---|---|---|
| Posición inicial de la pelota | | | |
| Posición final de la pelota | | | |
| Aceleración a la que está sometida la pelota | | | |
| Velocidad inicial de la pelota | | | |
| Tiempo en el que la pelota llega a su posición final | | | |

Llena el cuadro con mucho cuidado, pon atención a los detalles: por ejemplo, la posición inicial de la pelota no es la misma que su posición final.

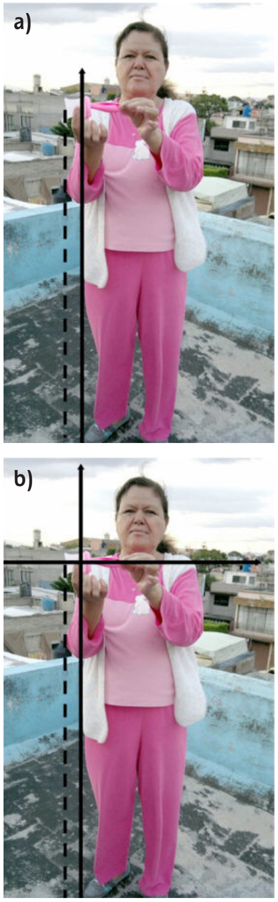



Figura 1.13 (a) de una persona sosteniendo el aparato descrito, con un sistema de referencia que podría representarse por un par de ejes cartesianos cuyo origen está en el suelo, directamente debajo del aparato, y b) de la misma persona en la misma posición, pero con el sistema de referencia colocado en la posición del aparato en su mano.

IV. ¿Por qué?

Para poder escribir la ecuación correctamente necesitas conocer la aceleración del objeto, su posición inicial y su velocidad inicial. ¿Tienes los tres datos? De no ser así, ¿puedes calcular el que falta?

Consulta el problema con tu experto de confianza o con alguna persona que, como tú, esté estudiando el bachillerato. Reflexiónalo tú mismo(a) con profundidad, y calcula el elemento faltante.

Sigue adelante cuando tengas una respuesta que te satisfaga.

V. Escribe ahora la ecuación que describe el movimiento de la pelota.

---

Empleando una computadora con acceso a Internet, dirígete a la página http://www.geogebra.org, y descarga el programa Geogebra. Se trata de un software libre de geometría dinámica con el que podrás -entre otras cosas- obtener la gráfica de la ecuación que acabas de encontrar.

Instala Geogebra en la computadora; sigue todas las instrucciones del instalador, y ejecuta el programa. Aparecerá una pantalla parecida a esta:

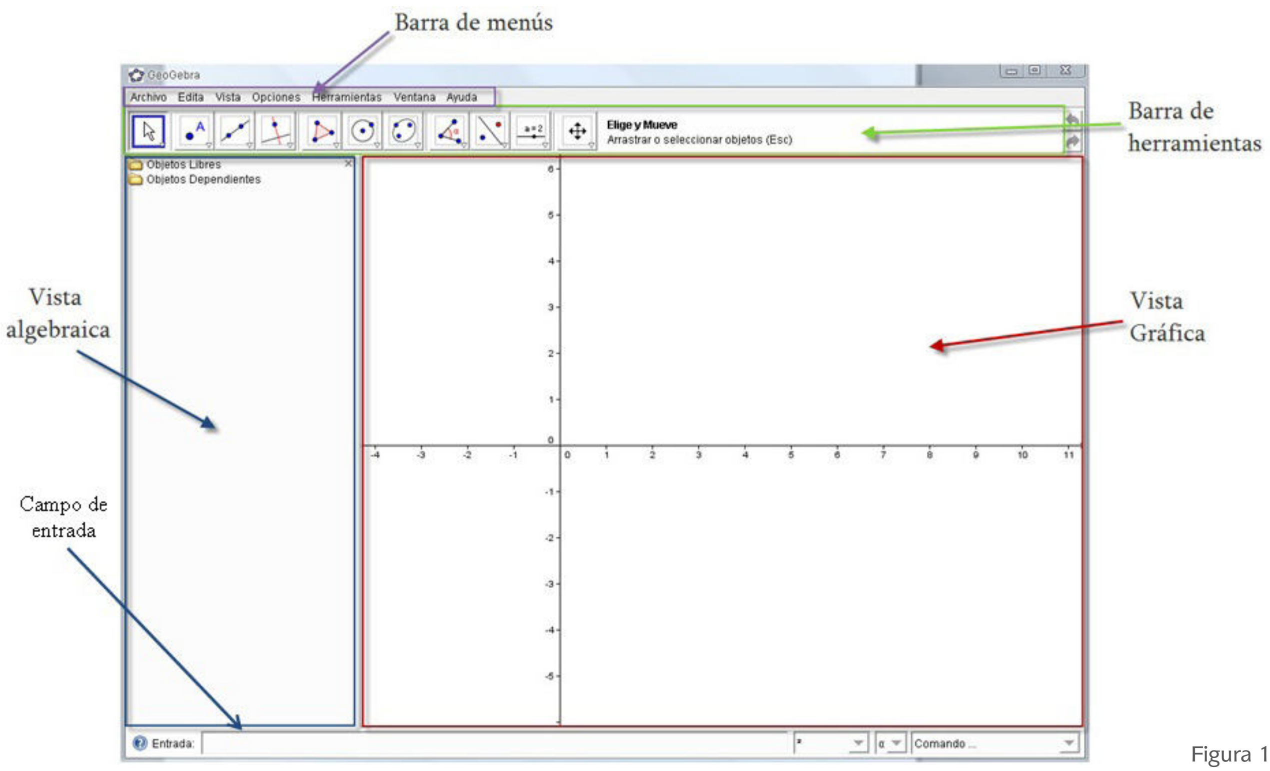



Figura 1.14

Introduce tu ecuación en el campo "entrada". Recuerda que Geogebra no sabe que estás hablando de distancias, velocidades y tiempos, así que en lugar de la variable dependiente *d* escribe "*y*", y en lugar de la variable independiente *t*, escribe "*x*".

Para representar la potencia 2, emplea el acento circunflejo, ^. Por ejemplo, $x^2$ se escribe *x*^2.

Una vez que tu ecuación esté lista, presiona la tecla "intro" y Geogebra dibujará su gráfica.

Observa la gráfica cuidadosamente. Si es necesario, localiza y selecciona el icono "Zoom de alejamiento" (bajo "Desplazar vista gráfica") para tener una mejor vista de la curva. La gráfica de cualquier función cuadrática —como la que estás viendo— es una curva de este tipo, que recibe el nombre de "parábola".

Toma en cuenta que esta parábola es una representación de la función tiempo-distancia para el movimiento de la pelota; no es dibujo de su trayectoria. Es decir, lo que se está graficando es un conjunto de parejas tiempo-distancia como las que se obtuvieron para el movimiento de Don Martín y el de Citlalli. Dibujar la trayectoria que sigue el objeto móvil (pelota, Don Martín, Citlalli) sería un asunto muy distinto.

Al respecto, recuerda que en la sección *Otra clase de movimiento*, se estudió el movimiento de un automóvil que aunque viajaba en línea recta, daba una gráfica tiempo-distancia que no era recta: estas gráficas no son dibujos de la trayectoria que siguen los objetos móviles que les dieron origen.

Aun así, puedes obtener mucha información sobre el movimiento a partir de la gráfica que acabas de obtener con Geogebra.

Localiza el icono "nuevo punto" en la barra de herramientas (figura 1.14) y selecciónalo; a continuación haz clic en la curva dibujada por el programa, para obtener un punto que pertenezca a ella. Cuando lo hagas, nota que en la ventana "vista algebraica" aparecerán las coordenadas del punto que acabas de construir.

Ahora localiza y selecciona el icono "elige y mueve" en la misma barra de herramientas, y haz clic sobre el punto que acabas de dibujar. Muévelo a lo largo de la curva, empleando para ello el ratón o las teclas de dirección. Moviendo el punto y observando sus coordenadas (que no son sino parejas tiempo-distancia), responde:

VI. ¿Cuál es la altura máxima que llega a alcanzar la pelota?

VII. ¿En cuánto tiempo alcanza la altura máxima?

VIII. ¿En cuánto tiempo lleva recorrida la mitad de esa altura?

IX. ¿Después de cuánto tiempo regresa a su posición inicial?

X. ¿Cuántos segundos tarda en llegar al suelo?

Es muy probable que en la mayoría de estas preguntas, si no es que en todas, no puedas dar una respuesta exacta. Es decir, ¿cómo asegurar la posición exacta de la altura máxima, o del instante preciso en que la distancia recorrida era la mitad de esa altura? En la sección siguiente exploraremos cómo el Álgebra es de ayuda para poder responder esta clase de preguntas.

Más adelante volverás a trabajar con Geogebra, así que no desinstales el programa si estás trabajando desde tu propia computadora.

## *Graficando manualmente*

Alternativamente, puedes obtener un dibujo de la gráfica empleando lápiz y papel si primero construyes una tabla *tiempo* vs *distancia recorrida*, parecida a la tabla 1.2 de la sección *Representando funciones*. Para lograrlo, toma la ecuación que describe el movimiento de la pelota (supongamos que, con el tiempo en segundos y la distancia en metros, la ecuación fuera $d = -4.9t_2 + 20t + 1$) y asígnale diferentes valores a la variable $t$; para cada uno de ellos, usa la ecuación para calcular el valor correspondiente de $d$. Como $t$ es el tiempo de vuelo de la pelota, podrías asignarle los valores 0, 1, 2, 3, 4,... segundos (mientras más valores tomes, tu gráfica tendrá más puntos y será más detallada).

Así que entonces, necesitas colocar dichos valores en una tabla:

| $t$ **(segundos)** | $d$ (metros) |
|---|---|
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | 21.4 |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| ⋮ | ⋮ |

Y emplearlos para calcular, mediante la ecuación, los correspondientes valores de $d$. Por ejemplo, el valor $d = 21.4$ que ya aparece en la tabla se calculó usando $t = 2$ en la ecuación que estamos usando como ejemplo, que entonces se convierte en

$$d = -4.9(2)^2 + 20\ (2) + 1$$

Lo cual da

$$d = -19.6 + 40 + 1$$
$$d = 21.4$$

Del mismo modo puedes llenar las demás casillas de la tabla, para luego dibujar cuidadosamente unos ejes cartesianos en papel (milimétrico de preferencia) y ubicar ahí las distintas parejas ($t$, $d$) que obtengas.

El resultado será un conjunto de puntos que al unirse formarán una línea suave, que se convertirá en un dibujo a mano de la misma gráfica que obtendrías con Geogebra. Por un lado, este procedimiento tiene la desventaja de ser más laborioso; por otro, tiene la ventaja de que no requiere que tengas acceso a una computadora, ni a Internet.

Sigue adelante.

## *Funciones cuadráticas*

En las secciones *Funciones y movimiento*, y *Representando funciones*, estudiaste que una función es una relación entre dos variables, de tal manera que si conoces el valor de una de ellas, puedes calcular el valor de la otra.

También aprendiste que una función se puede representar mediante ecuaciones, tablas y gráficas (entre otros medios de los que no nos ocuparemos aquí).

Las funciones que trataste en aquellas secciones se representaban mediante **ecuaciones lineales** (ve al Apéndice 5 para más detalles), por lo que se les llama también **funciones lineales**.

Desde la sección *Otra clase de movimiento*, han aparecido funciones que se representan mediante ecuaciones cuadráticas. Estas funciones se llaman, precisamente, funciones cuadráticas.

La gráfica de una función cuadrática no será nunca una línea recta (como en las funciones lineales) sino una curva que, como se comentó en la sección anterior, recibe el nombre de "parábola".

Imagina por ejemplo que la ecuación correspondiente a la pelota que lanzaste hacia arriba en la sección *Disparo al cielo azul* hubiera sido

$$d = -0.5\ t^2 + 3.25t + 2$$

Si ese fuera el caso, figura 1.15 muestra la gráfica que se obtiene de esta ecuación.

Como habrás notado en la sección anterior, el punto señalado con la letra V es importante, pues nos indica la altura máxima que alcanzará la pelota, así como el tiempo en que llegará a esa altura. Ese punto se llama "**vértice**" de la parábola, y es conveniente que aprendas a obtener sus coordenadas. Se puede lograr de la siguiente manera:

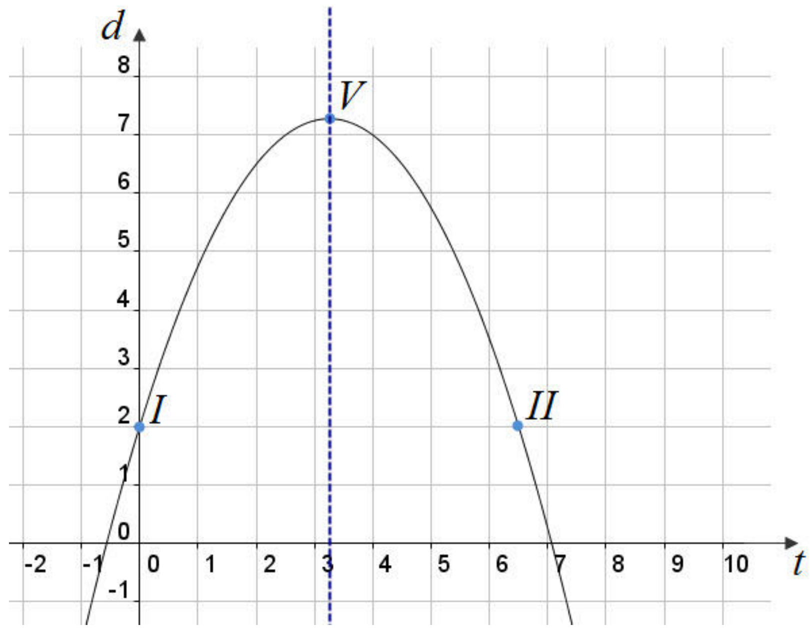



Figura 1.15

Observa la figura 1.15 con atención. El punto I corresponde al momento en que $t = 0$. ¿Cuál es el valor de $d$ en ese punto? Podemos averiguarlo sustituyendo $t = 0$ en la ecuación de la parábola, que de acuerdo con nuestra suposición, es

$$d = -0.5\, t^2 + 3.25t + 2$$

Al efectuar la sustitución, tenemos

$$d = -0.5\,(0)^2 + 3.25(0) + 2$$
$$d = 2$$

lo cual significa que las coordenadas del punto I son (0, 2). Ahora bien, una parábola es una curva simétrica; su eje de simetría es la línea vertical punteada de la figura 1.15; fíjate que esa línea pasa por su vértice. Tomando eso en cuenta, podemos pensar ahora en el punto II, el cual es simétrico al punto I respecto al eje de simetría de la parábola. Por ser simétrico, el valor de $d$ en ese punto también es 2. ¿Cuánto vale $t$? Sustituyamos $d = 2$ en la ecuación:

$$2 = -0.5t^2 + 3.25t + 2$$

Y ahora despejemos $t$:

| | |
|---|---|
| $2 - 2 = -0.5t^2 + 3.25t$ | Restamos c a ambos lados de la ecuación. |
| $\Rightarrow 0 = -0.5t^2 + 3.25t$ | (2 menos 2 da cero) |

Ahora, los dos términos del lado derecho contienen una $t$. Podemos separarla (proceso llamado “factorización”) y tenemos

$$0 = (-0.5t + 3.25)t$$

Consulta con tu experto de confianza porqué esta ecuación equivale a escribir las dos expresiones separadas,

$$-0.5t + 3.25 = 0 \qquad t = 0$$

De la segunda de ellas, tenemos algo que ya sabíamos, el valor de $t$ para el punto I vale cero. Pero al despejar $t$ de la primera expresión, obtendremos el valor de la coordenada $t$ para el punto II; queda

$$t = \frac{-3.25}{-0.5}$$

$$t = 6.5$$

Al ser la parábola una curva simétrica, la coordenada $t$ del vértice quedará justo en medio de las coordenadas $t$ de los puntos I y II, las cuales acabamos de calcular. Es decir, se encontrará justo a la mitad entre 0 y 6.5.

**33**

I. ¿A los cuántos segundos alcanza esta pelota su altura máxima?

II. ¿Cuál será esa altura máxima?

El análisis que acabamos de efectuar lo llevamos a cabo para la ecuación particular

$$d = -0.5\,t^2 + 3.25t + 2$$

Sin embargo, es posible generalizarlo y aplicarlo para la ecuación general

$$y = ax^2 + bx + c$$

En la que las variables son $x$, $y$, mientras que $a$, $b$ y $c$ son números constantes conocidos.

**34**

Lleva a cabo el procedimiento anterior aplicándolo ahora a la ecuación general $y = ax^2 + bx + c$. Hazlo cuidadosamente, paso a paso; el procedimiento es exactamente el mismo. Obtendrás dos expresiones que te permitirán calcular el valor de las

**Gestión del aprendizaje**

Cuando uno multiplica dos cantidades (o dos expresiones algebraicas), las cantidades –o expresiones– que se están multiplicando reciben el nombre de “factores”, mientras que el resultado de la operación se denomina “producto”.

El proceso inverso, que consiste en tomar un producto y separarlo en los factores que le dieron origen, se conoce como “factorizar”. De este modo, factorizar una expresión significa separarla en los factores que, al multiplicarse, dan como resultado la expresión original.

coordenadas del vértice de cualquier parábola, a partir de los valores de las constantes a, *b* y *c*. Escribe esas expresiones a continuación.

Toma nota de estas expresiones; te serán muy útiles más adelante.

**35** Empleando las expresiones deducidas en la actividad anterior para determinar las coordenadas del vértice de la gráfica correspondiente a las funciones siguientes:

I. $y = 2x^2 + 8x - 9$

II. $y = 3x^2 + 6x + 4$

III. $y = x^2 - 7x + 2$

IV. $y = -2x^2 + 10x + 11$

## *Algunas técnicas especiales*

Trabajar con funciones cuadráticas requerirá en general de algunas técnicas especiales que no hacían falta cuando las funciones (y sus ecuaciones) eran lineales; lee con atención el siguiente ejemplo:

**Ejemplo**

Esperando en la parada del transporte público, ves pasar a un motociclista. Se mueve acelerando a razón de 8 m/s$^2$, a partir de una velocidad inicial de 10 m/s (que llevaba en el momento en que lo viste pasar) y desde una posición inicial de 4 m (respecto al origen del sistema de referencia, que colocaremos en el lugar desde donde estás tú). Empleando la ecuación

$$d = \frac{1}{2}a^2t + v_0t + d_0$$

la ecuación del movimiento para este motociclista resulta ser

$$d = \frac{1}{2}(8)t^2 + 10t + 4$$
$$\Rightarrow d = 4t^2 + 10t + 4$$

Con ella, es posible averiguar la posición del motociclista luego de transcurridos 12 segundos; simplemente tomamos la ecuación y sustituimos los 12 segundos en el lugar de $t$:

$$d = 4(12)^2 + 10(12) + 4$$
$$\Rightarrow d = 4(144) + 120 + 4$$
$$\Rightarrow d = 576 + 120 + 4$$
$$\Rightarrow d = 700$$

Lo que significa que después de 12 segundos, el motociclista se encuentra a 700 metros del origen del sistema de referencia (que, como habíamos comentado, coincide con tu posición).

Si por otra parte se quiere saber el tiempo que al motocilista le tomará llegar a los 1000 metros de distancia, se toma la ecuación y se sustituyen esos 1000 m en el lugar de $d$:

$$1000 = 4t^2 + 10t + 4$$

Resolver esta ecuación cuadrática requiere técnicas particulares. Una de ellas es el empleo de la llamada "fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas". Para emplear esa fórmula, lo primero que se necesita es igualar la ecuación a cero:

$$0 = 4t^2 + 10t + 4 - 1000$$
$$\Rightarrow 0 = 4t^2 + 10t - 996$$

La fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas establece que en una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

El valor de $x$ se puede hallar a partir de los valores de $a$, $b$ y $c$ al hacer

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En este caso queremos resolver la ecuación

$$4t^2 + 10t - 996 = 0$$

De manera que $a = 4$, $b = 10$ y $c = -996$. Entonces, la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas se convierte en

$$t = \frac{-10 \pm \sqrt{(10)^2 - 4(4)(-996)}}{2(4)}$$

$$\Rightarrow t = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 16(-996)}}{8}$$

*(Continúa...)*

**Gestión del aprendizaje**

El símbolo "⇒" quiere decir "implica". De esta manera, $2x = 10 \Rightarrow x = 5$ se lee "dos veces $x$ igual a 10, implica que $x$ es igual a 5."

*(Continuación...)*

$$\Rightarrow t = \frac{-10 \pm \sqrt{100+15936}}{8}$$

$$\Rightarrow t = \frac{-10 \pm \sqrt{16036}}{8}$$

$$\Rightarrow t = \frac{-10 \pm 126.63}{8} = \begin{cases} t_1 = 14.58 \\ t_2 = -17.08 \end{cases}$$

Asegúrate de seguir todas las operaciones realizadas y de entender cada una de ellas. El resultado final indica que el tiempo tiene dos posibles valores, uno positivo y el otro negativo; (provenientes de cada uno de los dos signos que se le asignan a la raíz cuadrada); nos quedaremos con el valor positivo, pues el tiempo no toma valores negativos y por lo tanto esa solución, aunque correcta, no tiene un significado físico.

Entonces, para que el motociclista recorra una distancia de 1000 metros, deberán transcurrir aproximadamente 14.58 segundos.

La fórmula general no es la única manera de resolver una ecuación cuadrática; retoma lo abordado en el módulo *Representaciones simbólicas algoritmos*, realiza una investigación en Internet o en libros de texto, o consulta a tu experto de confianza sobre los métodos conocidos como "factorización" y "completar un trinomio cuadrado perfecto", pues en ocasiones llegan a ser tanto o más útiles que la fórmula general.

Por el momento, emplea los métodos recién discutidos para responder lo que se pide a continuación:

**36** Don Jacinto es un artesano pirotécnico de Tultepec, en el Estado de México. La noche del 15 de septiembre probará un nuevo modelo de cohete: es uno que despega desde una base que está a 1 metro del suelo, gracias al impulso que le proporciona una explosión de pólvora luminosa con la que obtiene una velocidad inicial de 40 m/s. Después de eso, el cohete sigue subiendo solamente por ese impulso inicial, pues no lleva más pólvora que continúe impulsándolo. Trabaja en tu cuaderno.

I. Escribe la ecuación que describe el movimiento de este cohete.

II. ¿En cuánto tiempo alcanza su altura máxima?

III. ¿Cuál es esa altura máxima?

IV. ¿En cuánto tiempo alcanza la mitad de esta altura máxima?

V. ¿Cuánto tarda en volver al suelo?

## *Atacando una función cuadrática desde un enfoque algebraico*

**37** En la sección *Disparo al cielo azul*, determinaste la ecuación que describe el movimiento de una pelota que lanzaste hacia arriba; las preguntas que se te presentan a continuación se plantearon ya en aquella sección. Respóndelas de nuevo, esta vez empleando los métodos que acaban de desarrollarse. Las preguntas son:

I. ¿Cuál es la altura máxima que llega a alcanzar la pelota?

II. ¿En cuánto tiempo alcanza la altura máxima?

III. ¿En cuánto tiempo lleva recorrida la mitad de esa altura?

IV. ¿Después de cuánto tiempo regresa a su posición inicial?

V. ¿Cuántos segundos tarda en llegar al suelo?

¿Coinciden las respuestas obtenidas por estos métodos algebraicos, con las que hallaste empleando la gráfica?

En un escenario ideal, las respuestas obtenidas empleando los métodos algebraicos deberían coincidir perfectamente con las halladas a través de métodos gráficos; después de todo, se trata simplemente de enfoques diferentes para resolver el mismo problema. Sin embargo, es probable que en la práctica ambos conjuntos de respuestas no coincidan con exactitud. Ello es debido a que los métodos gráficos son, por su naturaleza, menos precisos que los algebraicos.

**UN MOMENTO DE REFLEXIÓN**

Los dos tipos de movimiento con los que se ha trabajado en las secciones precedentes (caída libre y el tiro vertical), ya se parecen mucho más a lo que necesitamos para describir la caída de los paquetes de ayuda al soltarlos desde el avión hacia la plaza central del pueblo. Por ello, las funciones cuadráticas y su empleo serán importantes para resolver el problema planteado al inicio de la unidad. Sólo falta tomar en cuenta un detalle, que ya se insinuaba desde antes: al soltarlos desde el avión, los paquetes llevan un "impulso" extra hacia adelante, proporcionado por la propia velocidad del avión en vuelo. Eso hará que su movimiento no sea realmente una caída libre, ni un tiro vertical. Cuando avances a la siguiente sección, averiguarás más sobre este tipo de movimiento. ¡Sigue con ese buen trabajo!

## En pleno vuelo

Si en lugar de apuntar directamente hacia arriba el aparato que construiste en la sección anterior, lo haces "en diagonal", la trayectoria de la pelota será bastante parecida a lo que se muestra en la figura 1.16.

Este tipo de movimiento recibe el nombre de "tiro parabólico" por razones que son claras al observar la figura.

Si lo reflexionas un momento, notarás que la forma exacta de la parábola dependerá (quizá entre otras cosas) del ángulo respecto al suelo con el que realices el tiro. Un ángulo cercano a 90º dará una parábola muy "corta" y "alta". Un ángulo cercano a los 0º resultará en una parábola más "baja" y "larga".

Estás trabajando para emplear los conceptos del módulo para formular hipótesis relacionadas a fenómenos y problemas planteados, afines con la tecnología.

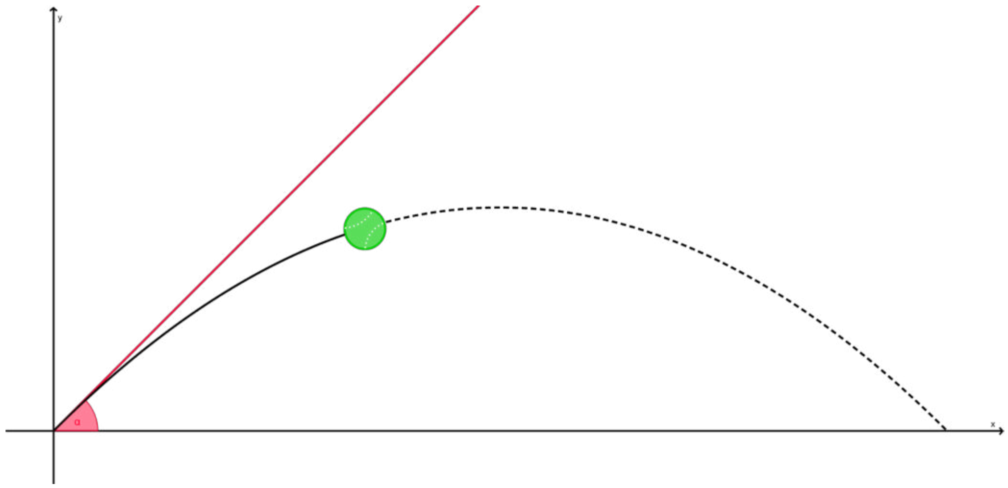


Figura 1.16 La pelota está siendo disparada con un ángulo de inclinación respecto al suelo distinto de cero; en líneas punteadas la trayectoria parabólica que seguirá la pelota.

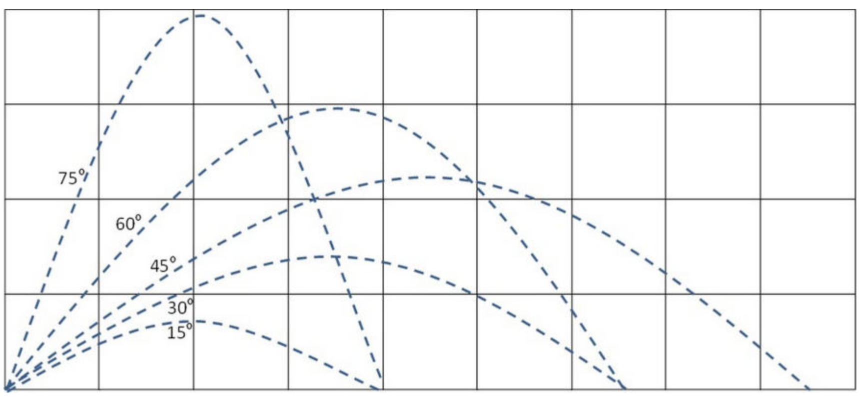



Figura 1.17


Cuando un jardinero toma una manguera para regar un prado, el chorro de agua que brota de la manguera sigue una trayectoria que podemos aproximar como una parábola. Suponiendo que la presión del agua (y por lo tanto la velocidad con la que sale de la manguera) no se puede modificar, ¿qué debe hacer el jardinero para que el agua llegue lo más lejos posible?

Piénsalo un momento.

Si tienes la oportunidad, haz la prueba tú mismo. ¿Cómo debes manejar la manguera para que el chorro de agua tenga el mayor alcance posible? (sólo procura no desperdiciar el agua).

Estas preguntas se pueden responder también si tienes acceso a una computadora con conexión a Internet. Dirígete a una de las páginas siguientes:

http://www.educaplus.org/play-110-Tiro-parabólico.html

http://galia.fc.uaslp.mx/~medellin/Applets/Tiro/Tiro.htm

http://www.educaplus.org/play-305-Alcance-y-altura-máxima.html

Se trata de diferentes simuladores con los que podrás observar las características principales del tiro parabólico, que además te ofrecen la posibilidad de manipular algunos de los parámetros importantes en este tipo de movimiento.

Explora las simulaciones y responde:

I. ¿Qué tienes que hacer para lograr que el proyectil llegue lo más lejos posible?

II. ¿Y para que llegue lo más alto posible?

III. Mantén fijas la velocidad inicial y la posición inicial del proyectil. ¿Qué ángulo da el mayor alcance posible?

Para analizar y comprender mejor el tiro parabólico, lo mejor es dividirlo en dos movimientos más sencillos: uno de ellos será rectilíneo uniforme, mientras el otro será rectilíneo uniformemente acelerado. Pero para saber cómo descomponer un movimiento que no es rectilíneo en dos que sí lo son, necesitas aprender un par de cosas sobre vectores.


El movimiento de los paquetes al caer desde el avión será precisamente de este tipo, un tiro parabólico. La diferencia con el movimiento de los proyectiles mencionados en esta sección es que el "tiro" no se realiza desde el suelo, sino desde el avión en vuelo, y que el ángulo del "disparo" es de cero grados.

Bajo estas condiciones, vuelve a tu portafolio del estudiante, recupera el dibujo que hiciste de la situación, y usando un color distinto agrega la trayectoria que debería seguir un paquete al caer desde el avión. Incluye una anotación en la que expliques que estás añadiendo la trayectoria en un momento posterior a la realización del dibujo original. Devuélvelo luego a tu portafolio.

Reflexiona cómo has avanzado desde estudiar un movimiento muy sencillo (el rectilíneo uniforme de Don Martín en su camino hacia el mercado) hasta movimientos que ya tienen cierto grado de sofisticación y que te permitirán resolver situaciones que pueden perfectamente ocurrir en la vida real. A lo mejor personalmente te ha tocado observar un tiro parabólico, reflexiona al respecto.

## *Vectores y una breve introducción a la Trigonometría*

Cuando en la sección *El cambio del cambio* hablábamos sobre la diferencia entre rapidez y velocidad, dijimos que la rapidez sólo contempla una magnitud (cuánta distancia recorre un objeto por unidad de tiempo) mientras que la velocidad incluye, además, una dirección. Una cantidad que sólo requiere especificar una magnitud (como la rapidez) se llama **escalar**. Por su parte, una cantidad que (como la velocidad) necesita que se especifique tanto su magnitud como su dirección recibe el nombre de **vector**.

Otro vector importante es el desplazamiento, que es a la cantidad escalar "distancia" lo que la velocidad es a la rapidez: cuando se dice que un objeto se ha movido 15 metros, se está hablando de una distancia; si en cambio se afirma que se ha movido 15 metros en dirección 40º noreste, se está tratando con un desplazamiento.

Un vector suele representarse en el plano cartesiano mediante una flecha, cuya longitud $r$ es la magnitud del vector; la flecha hace un cierto ángulo con el eje positivo $x$, el cual suele representarse mediante la letra griega $\theta$ ("theta"), y se considera como la dirección del vector. Mira la figura 1.18.

Una característica importante de los vectores es que se pueden separar en dos componentes, una horizontal y otra vertical. Cuando esas componentes son paralelas a los ejes cartesianos, se les llama componentes axiales. En la figura 1.18 se ven las componentes axiales del vector, en color azul.

Por lo general, resulta más sencillo trabajar con las componentes de un vector que trabajar con el vector mismo, así que es necesario que aprendas a descomponer un vector en sus componentes axiales.

Para comprender mejor cómo se hace, piensa en el caso de Sandra, que para llegar de su casa a la tienda

**glosario**

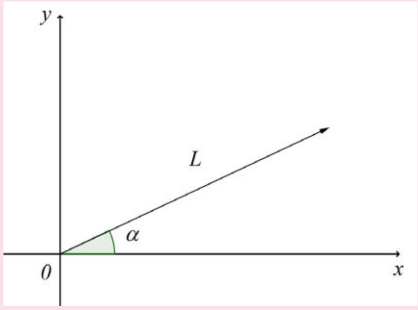
**Escalar:** un escalar es una cantidad que para quedar completamente especificada, sólo requiere que se proporcione su magnitud.

Por ejemplo, el tiempo es un escalar; no tiene "dirección", y para especificar por completo un intervalo de tiempo basta con decir cuál es su duración.

Si sólo se dice que un tren viaja a 50 km/h, se está diciendo su rapidez, un escalar. Cuando se especifica también su dirección, se está hablando de su velocidad, un vector.

**Vector:** cantidad que, para quedar completamente especificada, requiere de magnitud y dirección. Por ejemplo, la velocidad es un vector: no es suficiente con decir que el viento sopla con una rapidez de 60 km/h, hace falta también especificar en qué dirección está soplando.

Los vectores se representan en el plano cartesiano empleando flechas; la longitud de la flecha indica la magnitud del vector, la dirección de la flecha es la dirección del vector.




Un vector de magnitud $L$, y dirección $\alpha$.

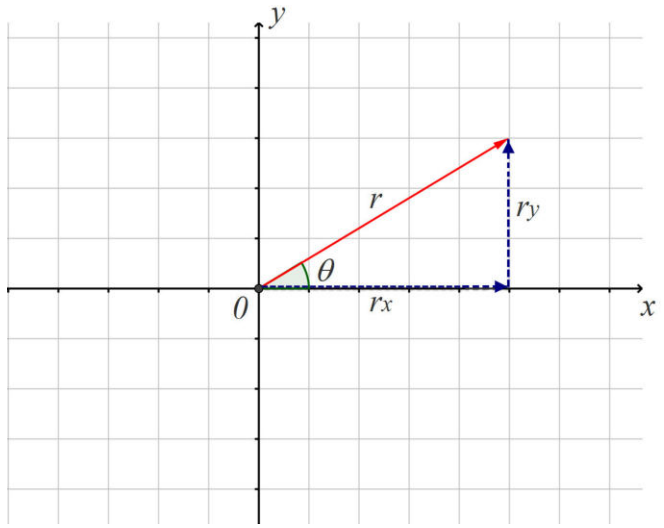



Figura 1.18 En rojo, un vector de magnitud *r* y dirección *θ*. En azul, las componentes axiales de este vector

de la esquina debe recorrer una cierta distancia en dirección este, y luego otra distancia determinada en dirección norte. Cuando llega a la tienda, se ha desplazado 10 metros desde su casa, en dirección 50º noreste. Mira la figura 1.19.

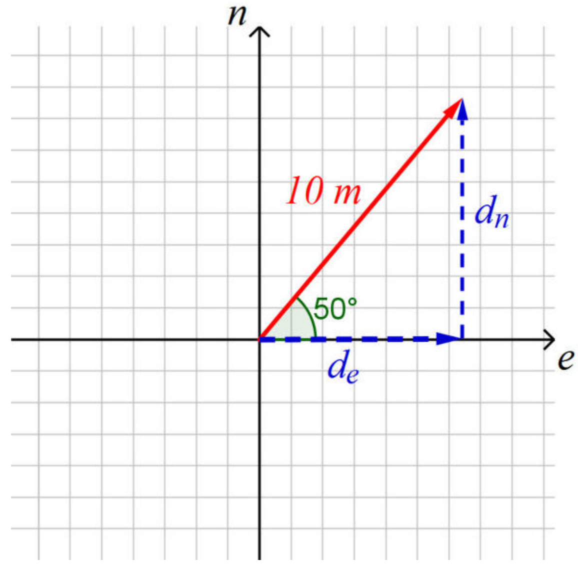
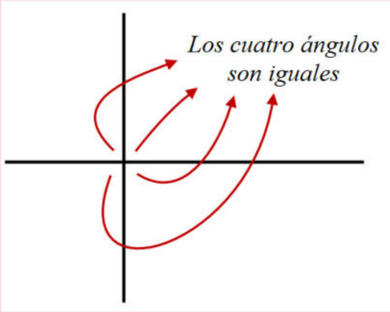



Figura 1.19 Para ir a la tienda de la esquina, Sandra debe caminar primero hacia el este y luego hacia el norte. Ambos recorridos están representados en azul. En rojo se ve el vector desplazamiento de Sandra para cuando llega a la tienda: 10 metros en línea recta, en dirección 50º noreste. Su casa está en el origen de coordenadas, la tienda está en la punta del vector desplazamiento.

**glosario**

**Ángulo recto:** si dos rectas se cortan, se formarán entre ellas un total de cuatro ángulos. Si los cuatro ángulos son iguales, cada uno es un ángulo recto.




Un ángulo recto mide 90º, o $\frac{\pi}{4}$ rad

**Ángulo agudo:** cualquier ángulo cuya medida sea menor que la de un ángulo recto.

**Ángulo llano:** cualquier ángulo cuya medida sea igual a la de dos ángulos rectos, es decir, 180º.

**Ángulo obtuso:** cualquier ángulo cuya medida sea mayor a la de un ángulo recto, pero menor que la de un ángulo llano.

Puedes observar el vector y sus componentes forman un triángulo rectángulo. En un triángulo rectángulo, los dos lados que forman el **ángulo recto** se llaman catetos, mientras que el tercer lado recibe el nombre de hipotenusa.

En nuestro caso, la hipotenusa es la magnitud del desplazamiento de Sandra (10 metros) mientras que los catetos son sus movimientos hacia el este ($d_e$) y hacia el norte ($d_n$).

Existe toda una rama de las Matemáticas cuya base es el estudio de los triángulos, y en particular de los triángulos rectángulos: la Trigonometría (del griego *trigono*, triángulo, y *metron*, medida). Calcular las componentes de un vector requiere de elementos de Trigonometría, así que comencemos a conocerlos:

En Trigonometría se acostumbra diferenciar los dos catetos de un triángulo de la siguiente manera: se considera uno de los **ángulos agudos** del triángulo, y se dice que el cateto que queda frente a ese ángulo es el "cateto opuesto". El cateto que con la hipotenusa forma a ese ángulo, se llama "cateto adyacente". Observa la figura 1.20.

Respecto al ángulo $\beta$ ("beta"), el cateto opuesto es $b$, mientras que el cateto adyacente es $a$. Pero respecto al ángulo $\alpha$ ("alfa"), los papeles se invierten y $a$ es el cateto opuesto, en tanto que $b$ queda como el cateto adyacente.

Resulta que con los tres lados de un triángulo pueden formarse seis distintas **razones** (consulta el Apéndice 4 para saber más respecto al concepto de razón en matemáticas), que se conocen como razones trigonométricas. Estas razones se definen respecto a uno de los ángulos agudos del triángulo, de modo que se pueda decir cuál es el cateto opuesto y cuál el adyacente.

Consulta al respecto el texto "Las seis razones trigonométricas" que se encuentra a continuación.

**glosario**

**Razón:** en matemáticas, una razón es una forma de comparar dos cantidades, al dividir una entre la otra. Por ejemplo, podemos comparar el número 8 con el número 2, dividiendo (obteniendo la razón 8/2) . El resultado es 4, que significa simplemente que el 8 es 4 veces más grande que el 2.

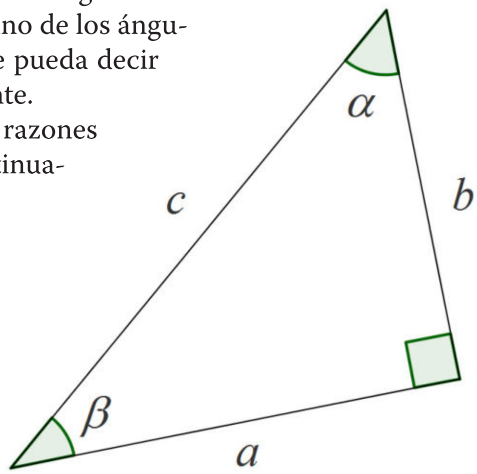



**Figura 1.20** Respecto a $\beta$, el lado b es el cateto opuesto mientras que a es el cateto adyacente. Estos roles se intercambian cuando se habla respecto al ángulo $\alpha$.

**Las seis razones trigonométricas**
Con los lados de un triángulo rectángulo se pueden formar seis razones. Cada una de ellas tiene un nombre propio; respecto al ángulo que se muestra en la figura, las seis razones son

| Nombre | Abreviatura | Razón |
|---|---|---|
| Seno de $\alpha$ | sen $\alpha$ | $\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$ |
| Coseno de $\alpha$ | cos $\alpha$ | $\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$ |
| Tangente de $\alpha$ | tan $\alpha$ | $\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$ |
| Cotangente de $\alpha$ | cot $\alpha$ | $\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$ |
| Secante de $\alpha$ | sec $\alpha$ | $\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente}}$ |
| Cosecante de $\alpha$ | csc $\alpha$ | $\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto}}$ |

Una vez que conoces los nombres y las definiciones de las seis razones trigonométricas, vuelve a la figura 1.19.

La magnitud del desplazamiento de Sandra (10 metros) es la hipotenusa de este triángulo; por otro lado, respecto al ángulo de 50º, la componente $d_e$ es el cateto adyacente mientras que $d_n$ es el cateto opuesto.

Lo que queremos es calcular, a partir de estos datos, los valores de magnitudes de $d_e$ y de $d_n$.

Para ello, estudia detenidamente las definiciones de las seis razones trigonométricas.

**40** Tomando en cuenta que por razones principalmente prácticas, se acostumbra trabajar sólo con las razones seno, coseno y tangente, responde:

I. ¿Cuál de esas tres razones involucra a la hipotenusa y al cateto adyacente?

II. ¿Cuál involucra a la hipotenusa y al cateto opuesto?

Escribe ambas razones. En lugar de “cateto opuesto”, “cateto adyacente” e “hipotenusa”, coloca “$d_n$”, “$d_e$” y “10” según corresponda.

**UN MOMENTO DE REFLEXIÓN**

Como discutíamos antes, respecto al problema al inicio de la unidad, los paquetes de ayuda humanitaria que se lanzarán desde el avión seguirán una trayectoria parabólica, que será más fácil de analizar si la separas en sus componentes vectoriales.

Desde este punto de vista, será conveniente dividir ese problema en dos fases: una que involucre el vuelo rectilíneo del avión, y otra que aborde la caída de los paquetes. La primera podrás analizarla con las herramientas correspondientes al movimiento rectilíneo uniforme, que desarrollaste en la primera parte de la unidad. La segunda requerirá las técnicas que estás terminando de estudiar ahora mismo.

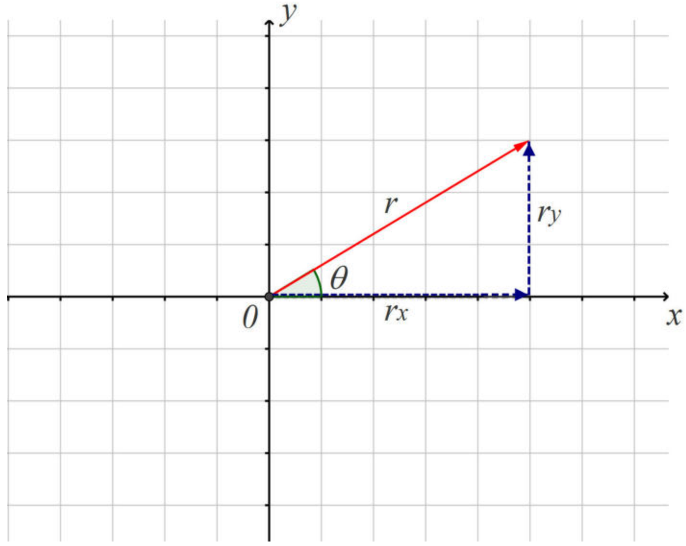
Te acercas ya al final de esta primera unidad, sigue así.

III. Ahora despeja a $d_n$ y también a $d_e$. Debes obtener $d_e$ = 10 cos 50º y $d_n$ = 10 sen 50º. Empleando una calculadora científica (asegúrate de que está ajustada para manejar los ángulos en grados; consulta su manual del usuario si es necesario), puedes verificar que el valor de estas componentes es $d_e$ = 6.43 y $d_n$ = 7.66.

En el caso general, las componentes de un vector *r* como el de la siguiente figura se obtienen mediante expresiones similares a las que acabamos de encontrar:

rx = r cos $\theta$

ry = r sen $\theta$




Ambas expresiones resultarán muy útiles a lo largo del módulo, así que asegúrate de tomar buena nota de ellas, y de comprender cómo es que se obtienen. En el Apéndice 1 se dan algunos detalles al respecto.

Empleando ambas ecuaciones es posible calcular las componentes axiales de un vector, a partir de su magnitud *r* y su dirección *θ*. En la siguiente actividad pondrás en práctica dichos cálculos, entre otras cosas.

## ¿Gol?

Estás trabajando para utilizar métodos algebraicos para obtener resultados cuantitativos en la solución de problemas relacionados con el movimiento en tu entorno.

Para concretar algunos detalles sobre el movimiento parabólico trabajemos el siguiente problema.

Un jugador del *Manchester United* se encuentra en posesión del balón a 60 metros de la portería. Chuta y el balón sale disparado con un ángulo de 30º respecto al suelo, y con una velocidad inicial de 25 m/s (ver figura 1.21). ¿Llegará el balón hasta la portería?

Para responder la pregunta, necesitaremos descomponer el movimiento del balón en dos partes. La idea es que al hacerlo, su movimiento parabólico quede separado en dos componentes más sencillas, una horizontal y otra vertical.

Observando atentamente descubrirás un hecho importantísimo en el estudio del tiro parabólico:

En la componente horizontal del movimiento, no interviene ninguna aceleración. Por lo tanto esta componente es un movimiento rectilíneo uniforme.

En la componente vertical, sólo interviene la aceleración de la gravedad. Por lo tanto este componente es un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Empleando lo visto en la sección anterior y razonando con cuidado, descomponer el movimiento será muy sencillo:

**Componente horizontal**

Colocando el sistema de referencia como en la figura 1.21, la posición horizontal inicial del balón es cero. La componente horizontal de su velocidad inicial será (ver figura 1.22)

$$v_{x0} = 25 \cos 30°$$

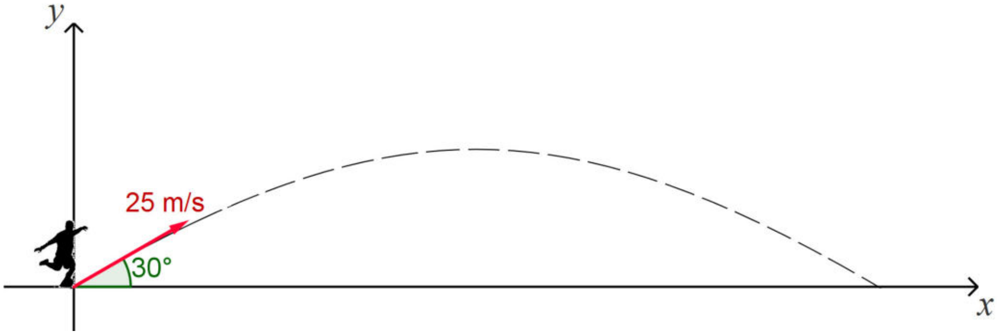



Figura 1.21

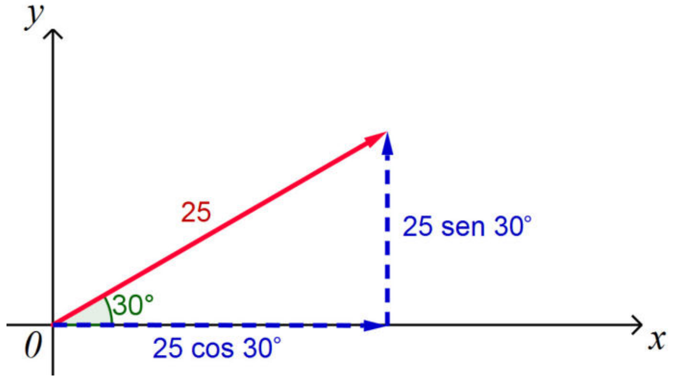



Figura 1.22

**Más información en...**

Para más información revisa de nuevo alguna de las simulaciones propuestas en la sección *En pleno vuelo*; si es necesario, activa las casillas que te permitan observar los vectores de velocidad y aceleración durante el movimiento. Hazlo ahora mismo, las direcciones son:

http://www.educaplus.org/play-110-Tiro-parabólico.html

http://galia.fc.uaslp.mx/~medellin/Applets/Tiro/Tiro.htm

http://www.educaplus.org/play-305-Alcance-y-altura-máxima.html

También podrías consultar el libro Física Conceptual de Paul Hewitt, en su capítulo dedicado al movimiento de proyectiles (Hewitt, P., *Física conceptual*, 9ª *edición*. México: Pearson Educación, 2004).

En la dirección horizontal, el balón recibe el impulso del jugador (que le proporciona su velocidad inicial) y luego no hay más agentes externos que influyan sobre su movimiento. Es decir, no hay ninguna aceleración (como ya habíamos mencionado párrafos arriba). Entonces esta componente del movimiento es rectilíneo uniforme, así que la ecuación que lo describe será

$$d_x = v_{x0}t + d_0$$

Al sustituir los valores que conocemos, quedará

$$d_x = 25 \cos 30° t + 0$$
$$\Rightarrow d_x = 25 \cos 30° t$$

**Componente vertical**

Con el mismo sistema de referencia, la posición vertical inicial del balón también es cero. La componente vertical de la velocidad inicial será

$$v_{y0} = 25 \text{ sen } 30°$$

En la dirección vertical, el balón recibe el impulso del jugador (que le proporciona su velocidad inicial), comienza a moverse e inmediatamente comienza a actuar sobre él la aceleración de la gravedad, que lo jala hacia abajo. De este modo, esta componente del movimiento es acelerado, y su ecuación será

$$d_y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{y0}t + d_{y0}$$

Sustituyendo los datos conocidos, tendremos

$$d_y = \frac{1}{2}(-9.8)t^2 + 25 \text{ sen } 30° \; t + 0$$
$$\Rightarrow d_y = -4.9t^2 + 25 \text{ sen } 30° \; t$$

Nota que la aceleración de la gravedad se colocó negativa: en nuestro sistema de referencia, la dirección "abajo" es negativa, mientras que "arriba" es positiva. Los signos cambiarán si en tu sistema de referencia elijes las direcciones de otra manera.

Hemos logrado descomponer el movimiento parabólico del balón en dos movimientos más sencillos. Las ecuaciones de cada uno son

$$d_x = 25 \cos 30° \; t$$
$$d_y = -4.9t^2 + 25 \text{ sen } 30° \; t$$

Ahora, a responder la pregunta: ¿Llegará el balón hasta la portería?

Usamos esta última ecuación para determinar cuánto tiempo tardará el balón en llegar al suelo (momento en el cual, $d_y = 0$):

$$0 = -4.9t^2 + 25 \text{ sen } 30° \; t$$

$$-4.9t^2+12.5t=0$$

Resolviendo por fórmula general,

$$t=\frac{-12.5\pm\sqrt{12.5^2-4(-4.90)(0)}}{2(-4.90)}$$

$$\Rightarrow t=\frac{-12.5\pm 12.5}{-9.8}=\begin{cases}t_1=0\\ t_2=2.55\end{cases}$$

El primer valor ($t$ = 0) corresponde simplemente al momento en que el jugador chuta. El segundo es el que nos interesa: el balón se mantiene en el aire durante 2.55 segundos.

¿Qué tan lejos llega en ese tiempo? Usemos la ecuación correspondiente a la componente horizontal del movimiento:

$$dx = 25 \cos 30° \; t$$

Sustituimos $t$ = 2.55 y tenemos

$$d_x=25 \cos 30° \,(2.55)=55.21 \text{ metros}.$$

Entonces, el balón caerá después de volar 55.21 metros. No llega hasta la portería, que se encontraba a 60 metros.

El análisis que hemos realizado es lo suficientemente rico como para permitirnos obtener más información sobre el movimiento del balón. Por ejemplo, podemos determinar cuál es la altura máxima que alcanza durante su vuelo; para ello, empleamos la ecuación que controla

$$d_y=-4.9t^2+25 \text{ sen } 30° \; t$$

Y buscamos las coordenadas de su vértice usando las fórmulas que debiste encontrar en la sección *Funciones cuadráticas*:

$$t=-\frac{b}{2a}=-\frac{25 \text{ sen } 30°}{2(-4.90)}=1.27$$

$$d_y=1-\frac{(25 \text{ sen } 30°)^2}{4(-4.90)}=8.97$$

Lo cual significa que a los 1.27 segundos de vuelo el balón alcanza su altura máxima de 8.97 metros.

Ahora, pon en práctica estos conocimientos:


En una competencia de tiro con arco, un participante se dispone a disparar una flecha hacia el blanco, que se encuentra a 90 m de distancia. Al colocarla en el arco y apuntar, la flecha queda a la una altura de 1 metro sobre el suelo. Suponiendo además que el arquero dispara la flecha con un ángulo de 20° respecto a la horizontal, con una velocidad inicial de 38 m/s, determina:

I. El tiempo de vuelo de la flecha.

II. Si la flecha alcanzará el blanco.

Puedes encontrar las respuestas correctas en el Apéndice 1 al final del libro; pero para que tu esfuerzo valga la pena, sólo revísalas cuando hayas encontrado alguna solución por tu cuenta.

Es importante aclarar que al analizar el movimiento del balón hemos realizado varios supuestos que podrían no cumplirse en la realidad, de modo que los resultados reales podrían diferir de los que acabamos de encontrar. Discute con tu experto de confianza cuáles podrían ser estos supuestos (por ejemplo, se supuso que ningún otro jugador interrumpirá la trayectoria del balón).

Cuando en ciencia se describe un fenómeno natural, es importante realizar esta clase de supuestos para simplificar la situación y poder realizar un primer acercamiento a su estudio. Este proceso se llama modelación, y es una de las actividades centrales en el trabajo de físicos, matemáticos, biólogos, ingenieros, economistas y muchos otros profesionistas.

42 Un practicante de parkour (deporte extremo consistente en desplazarse lo más hábilmente posible, superando los obstáculos que se presenten en el terreno empleando la habilidad corporal) corre sobre el filo de un muro a una velocidad de 6 m/s. Llega al final del muro y salta hacia adelante con esa velocidad inicial; el suelo se encuentra 3 metros abajo.

I. Escribe las ecuaciones que describen las componentes horizontal y vertical del movimiento de este deportista al saltar, empleando un sistema de referencia cuyo origen se encuentre en el suelo, al pie del muro, directamente debajo del punto desde el cual saltó.

II. ¿A qué distancia del muro aterrizará?

III. ¿Cuánto tiempo durará su vuelo?

43 Respecto a la situación planteada al principio de la unidad, ya habíamos mencionado que el movimiento de los paquetes al caer desde el avión se analizaría

### Para saber más

El Parkour es una disciplina física de origen francés, para algunos es un deporte extremo, mientras que para otros es una disciplina comparable a las artes marciales que tiene su propia filosofía de vida que trata sobre la superación personal y sobre el espíritu de lucha constante para alcanzar metas y objetivos.

A quien practica Parkour, se le denomina traceur, que en francés significa “trazador”, pues un traceur, debe trazar una línea recta y superar todos los obstáculos que se le presenten en el camino.

con mayor facilidad si se le separa en sus componentes vertical y horizontal. Al dejarlos caer, los paquetes de ayuda tienen una velocidad inicial horizontal igual a la de la aeronave, que habíamos supuesto de 200 km/h. En la dirección vertical, su velocidad inicial es cero. En esta segunda fase del problema (recuerda que la primera concierne al vuelo rectilíneo del avión), la posición inicial de un paquete dependerá del lugar en el que coloques tu sistema de referencia; si lo colocas en el punto desde el que se les deja caer, su posición inicial horizontal es cero, pero no la vertical (recuerda que el avión viaja a 3000 m de altura sobre el suelo).

Emplea estos hechos para escribir ecuaciones que describan ambas componentes del movimiento de los paquetes cuando se les deja caer. Incluye tus ecuaciones en tu portafolio del estudiante, y pasa a la siguiente sección.

CIERRE

## De vuelta al avión de ayuda humanitaria

Las herramientas que has estudiado a lo largo de esta primera unidad te permitirán resolver el problema que se propuso al inicio de esta unidad. Vuelve a la inicio de la unidad en la sección *Ayuda humanitaria*, y relee la situación planteada.

Supón ahora que el avión salió de un aeropuerto que se encuentra a 500 km de distancia de la plaza central del pueblo donde se necesita la ayuda. Considera también que inmediatamente después de despegar, adopta una velocidad de 200 km/h y una altura de 3000 m sobre el nivel del suelo, que en esa zona geográfica es llano. Ambos parámetros se mantendrán constantes a lo largo de todo el vuelo.

Trabaja bajo el supuesto de que los paquetes de ayuda serán arrojados sin ninguna clase de paracaídas, e ignora los efectos que pudieran tener el viento y la fricción del aire sobre su caída.

Usa los elementos que has recopilado en tu portafolio del estudiante; recuerda que el problema conviene estudiarlo en dos fases, una correspondiente al movimiento rectilíneo del avión, y otra a la caída parabólica de los paquetes. Tomando todo ello en cuenta,

(I) Retoma lo aprendido y cumple tu misión a bordo: infórmale al piloto después de cuánto tiempo de vuelo deberá accionar el mecanismo que soltará los paquetes.

Usa la siguiente lista de cotejo para verificar que has realizado todos los pasos necesarios para resolver el problema; palomea el recuadro correspondiente frente a cada elemento, según lo hayas llevado a cabo o no.

En el Apéndice 1 puedes verificar cuáles son los resultados que debiste obtener en cada paso.

| Elementos de la solución | Sí | No |
|---|---|---|
| Escribiste las ecuaciones del movimiento para el paquete en su caída desde el avión hacia la plaza central del pueblo. | | |
| Identificaste correctamente los valores de la posición inicial, la velocidad inicial y la aceleración del paquete, en la componente vertical de su movimiento. | | |
| Identificaste correctamente los valores de la posición inicial, la velocidad inicial y la aceleración del paquete, en la componente horizontal de su movimiento. | | |
| Expresaste todas las cantidades en el mismo sistema de unidades (es decir, las expresaste todas usando metros y segundos, o las expresaste todas en kilómetros y horas) | | |
| Calculaste el tiempo de caída del paquete | | |
| Calculaste la distancia horizontal recorrida por el paquete en su caída. | | |
| Calculaste la distancia que deberá recorrer el avión para soltar el paquete. | | |
| Calculaste el tiempo de vuelo del avión para cubrir la distancia anterior. | | |
| Expresaste este tiempo en horas. | | |

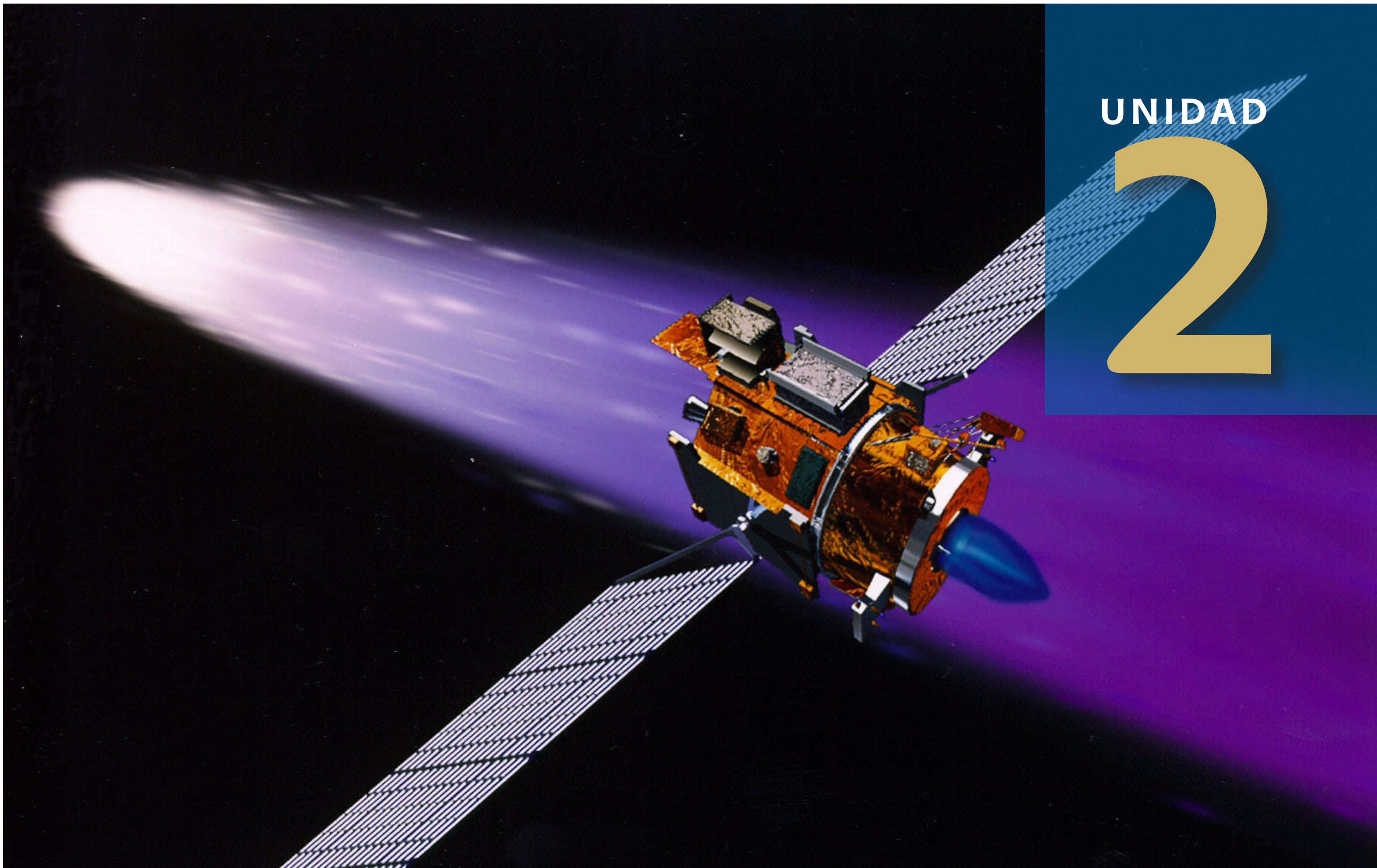
Hemos llegado al final de la primera unidad. Elabora un mapa conceptual que reúna los conceptos siguientes:

- Movimiento rectilíneo uniforme
- Rapidez
- Velocidad
- Movimiento uniforme acelerado
- Aceleración
- Vectores
- Ecuación lineal
- Ecuación cuadrática
- Razones trigonométricas
- Caída libre
- Tiro vertical

Recuerda que lo importante en un mapa conceptual es establecer tantas conexiones como sea posible entre los conceptos que lo integran. Siéntete libre de incluir otros que consideres pertinentes, y procura relacionarlos con situaciones que observes en la vida real. Agrega este mapa a tu portafolio del estudiante.

Como una segunda parte de esta autoevaluación, te invitamos a que reflexiones cuidadosamente sobre los conceptos que has estudiado en esta primera unidad. Luego, propón una situación problemática que observes en tu vida cotidiana y en la que intervengan dichos conceptos (por ejemplo, ¿qué tan lejos llega una lata cuando la pateo en la calle? o ¿Cuál es la velocidad inicial que le doy a mi cuerpo al saltar hacia arriba con todas mis fuerzas?); procura emplear tus nuevos conocimientos para aportar una respuesta al problema que hayas planteado.

Sigue adelante.



# UNIDAD 2

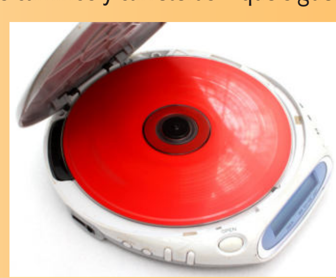
# Movimiento circular

## ¿Qué voy a aprender y cómo?

En la unidad anterior estudiaste dos tipos importantes de movimiento: el rectilíneo uniforme y el uniformemente acelerado. A partir de ellos nos fue posible analizar otros más sofisticados, como el tiro vertical y el tiro parabólico.

En esta segunda unidad abordaremos otra clase de movimiento que aparece frecuentemente en numerosas situaciones: el **movimiento circular**.

Si observas con atención notarás que efectivamente, hay muchos objetos moviéndose en trayectorias circulares por doquier: para empezar, nuestra civilización funciona gracias a toda clase de ruedas, engranes y mecanismos giratorios; además, algunos ejemplos menos evidentes se pueden encontrar en las curvas de los caminos y carreteras —que siguen la forma de un arco circular—, en el movimiento de rotación de la Tierra, en las impresionantes acrobacias de gimnastas y clavadistas, etcétera… Más aún, el movimiento circular es un caso particular del llamado movimiento armónico simple, que es el que se observa, por ejemplo, en un péndulo —bajo ciertas condiciones que estudiarás en su momento.



¿Puedes pensar en algún otro ejemplo de movimiento circular? ¿Cuáles?

# U2 MOVIMIENTO CIRCULAR

## ¿Con qué propósito?

El propósito de esta unidad es que representes, interpretes y resuelvas situaciones problemáticas en las que se presenten procesos naturales vinculados con el movimiento rectilíneo, el movimiento circular y el movimiento armónico simple, aplicando conceptos tanto algebraicos como geométricos y trigonométricos.

## ¿Qué saberes trabajaré?

En esta unidad te enfrentarás a un nuevo tipo de movimiento, el movimiento circular (que puede ser uniforme y no uniforme), que está involucrado en muchas situaciones reales: el movimiento de ruedas, motores, péndulos y otros artefactos, así como en fenómenos naturales como la rotación de los planetas. Para estudiar este tipo de movimiento tendrás que familiarizarte con nociones provenientes de la Geometría como circunferencia, ángulo, longitud de arco, sector circular, y otras surgidas en la Física (periodo, frecuencia, amplitud). También profundizarás en el estudio de las ecuaciones lineales, las razones trigonométricas y las funciones trigonométricas; estas últimas te introducirán al llamado círculo unitario y a las identidades trigonométricas.

Aprenderás como analizar, cuantificar y registrar datos en distintos escenarios hipotéticos en los que intervengan elementos tanto constantes como variables, usarás métodos y representaciones algebraicas y gráficas para abordar movimientos circulares y armónicos simples, calculando velocidades lineales y angulares, así como periodos y frecuencias. También describirás este tipo de movimientos empleando tecnologías de la información y la comunicación.

Al mismo tiempo, continuarás desarrollando una actitud analítica, creativa, autónoma y sistemática.

Una ruta sugerida para abordar los saberes es la siguiente:

**Movimiento circular**
- El satélite perdido
- Elementos previos
- En la rueda de la fortuna
- Funciones trigonométricas y movimiento armónico simple
- La práctica hace al maestro
- En otra parte de la feria
- Recapitulación
- Movimiento circular acelerado
- El péndulo
- Al rescate del satélite perdido

## ¿Cuáles serán los resultados de mi trabajo?

En particular, al terminar de estudiar esta unidad, deberás desarrollar las siguientes habilidades:

- Representar e interpretar el movimiento circular con respecto al tiempo en situaciones de tu vida cotidiana por medio de la aplicación de herramientas matemáticas.
- Representar e interpretar el movimiento armónico con respecto al tiempo, y a una fuerza aplicada.
- Expresar matemáticamente el movimiento de un objeto que corresponde al armónico simple.
- Resolver situaciones problemáticas que involucren el cálculo de la velocidad en un movimiento circular uniforme o uniforme acelerado.
- Resolver situaciones problemáticas de tu entorno o de un fenómeno natural que involucre el cálculo del periodo y la frecuencia de un objeto, cuyo movimiento corresponda a la trayectoria del movimiento circular.
- Utilizar software matemático para la representación e interpretación del movimiento circular.
- Utilizar métodos algebraicos, gráficos y trigonométricos en la solución e interpretación de problemas prácticos de situaciones de tu entorno, relativos a diferentes tipos de movimiento.

## ¿Cómo organizaré mi estudio?

De un modo similar a lo que ocurrió en la primera unidad, será mejor que dediques a tus estudios un mínimo de tres a cuatro horas diarias, de lunes a viernes. Haciéndolo así, tus avances deberían ser aproximadamente de la siguiente manera:

Semana 2. El martes o miércoles de esta semana debiste concluir la unidad 1. Lo mejor sería que para el viernes llegaras hasta la sección *Ecuaciones del movimiento circular uniforme*. En esta primera fase estudiarás algunos conceptos relativos a la geometría de la circunferencia y realizarás tus primeros acercamientos al movimiento circular uniforme.

Semana 3. Deberías avanzar desde la sección *La altura de la canastilla… un análisis gráfico y algebraico* hasta la sección *¿Movimiento armónico simple en el péndulo?* En esta fase de tu estudio profundizarás en el estudio del movimiento circular.

Semana 4. El lunes o martes de esta semana deberías terminar con la unidad.

Te encontrarás con actividades experimentales y otras que requerirán el empleo de Internet; si no cuentas con acceso a Internet en casa, planea desde ahora la manera en que la llevarás a cabo. Podrías, por ejemplo, trabajar desde un café Internet o desde una biblioteca en la que haya conexión a la red.

¡Manos a la obra!

INICIO

## El satélite perdido

Una empresa de telecomunicaciones acaba de perder contacto con uno de sus satélites artificiales, el cual está en órbita circular alrededor de nuestro planeta. Su equipo de ingenieros han determinado que el satélite sigue recibiendo la información que se le envía desde la Tierra, y han identificado el problema: el artefacto no logra transmitir información de regreso debido a una falla en el software que controla dicha transmisión de información.

Los mismos ingenieros han logrado diseñar un "parche", una serie de códigos informáticos que corregirá el problema, bajo la condición de que al ser enviados desde la base terrestre de la empresa, el satélite efectivamente los reciba.

Este "parche" se enviará mediante una señal de radio, que viajará en línea recta desde la base hasta el satélite… si logran ubicar en dónde se encuentra.

Tu misión es ayudar al equipo de ingenieros a calcular el momento exacto en el que deben enviar la señal hacia el satélite –cuya órbita pasa precisamente sobre la base terrestre desde la cual se realizará la transmisión–, de modo que estén seguros de que el aparato la reciba correctamente. La señal se enviará en dirección vertical, hacia arriba, en el momento justo en que el artefacto pase por encima de la base terrestre. Hay millones de pesos involucrados así que es muy importante que todo salga bien.

¿Crees que haya alguna posibilidad de que la misión tenga éxito?

¿Por qué?

¿Qué información crees que se necesite para determinar el momento correcto para realizar la transmisión?

¿Hasta qué punto te serán de ayuda los conocimientos que has adquirido en la unidad anterior?

En esta segunda unidad estudiarás conceptos y procedimientos con los cuales será posible resolver este problema, y ahorrarle a la empresa los millones de pesos que costaría lanzar un satélite nuevo.

Por el momento, pasa a la siguiente sección, en la que retomarás algunos elementos necesarios para trabajar con el resto de la unidad. Luego trabajarás con una variedad de situaciones que al principio serán más fáciles de analizar, y que poco a poco te ayudarán a desarrollar las herramientas necesarias para volver a este problema y resolverlo.

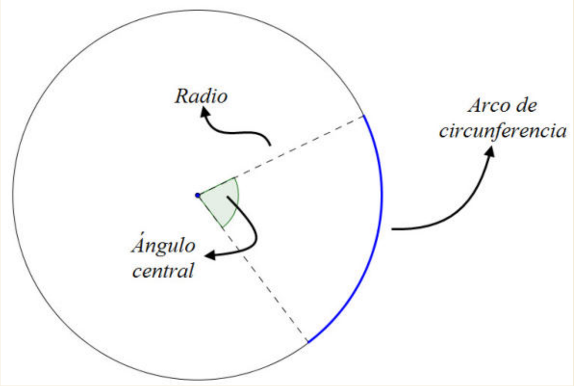
¡Ánimo y adelante!

## Elementos previos

Antes de comenzar conviene que refresques en tu memoria algunos hechos relacionados a una conocida figura geométrica: la circunferencia. ¿Sabes qué es una circunferencia? ¿Es lo mismo círculo que circunferencia? ¿Qué es el radio de una circunferencia? ¿Qué es el perímetro de una figura geométrica? ¿Qué es un ángulo? ¿Qué es un radián? Lee con atención y toma nota de los siguientes conceptos:

- Una **circunferencia** es una curva formada por todos los puntos que cumplen la siguiente condición: se encuentran todos a la misma distancia de otro punto fijo, el cual es llamado centro de la circunferencia.
- El **círculo** es la superficie que queda encerrada dentro de la circunferencia, que como acabamos de decir, es una línea curva.

- El **radio** de una circunferencia es un segmento de recta que va desde el centro de la circunferencia hasta un punto cualquiera perteneciente a ella.
- El **diámetro**, por su parte, es un segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia, pasando por su centro; la longitud del diámetro es el doble de la longitud del radio.
- El **perímetro** es la longitud del contorno de una figura geométrica cerrada. En el caso de la circunferencia, al perímetro suele llamársele así, "circunferencia", y se calcula mediante la formula $c = 2\pi r$.
- Un **ángulo** es la figura que se forma cuando dos segmentos de recta comparten un extremo. Los ángulos pueden medirse en grados (°), en radianes (rad), o en grados centesimales (grad).
- Un **ángulo central** es el que se forma entre dos radios de una circunferencia.
- Un **radián** es la medida de un ángulo central que queda determinado por una **longitud de arco** igual al radio de la circunferencia en cuestión.




Para calcular el **área del círculo**, se emplea la famosa fórmula $A = \pi r^2$.

Estos conceptos son elementales para la comprensión de los temas que abordaremos en esta unidad. Asegúrate de revisarlos con detenimiento, y luego continúa.

DESARROLLO

## En la rueda de la fortuna

Estás trabajando para representar e interpretar el movimiento circular con respecto al tiempo en situaciones de tu vida cotidiana por medio de la aplicación de herramientas matemáticas

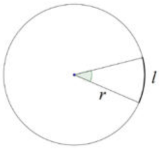
En la feria que visita regularmente la ciudad de Morelia, Michoacán, hay una rueda de la fortuna. Esta rueda tiene la forma de una circunferencia de 10 metros de radio y se muestra en la figura 2.1.

## ¿? Asesoría

**Radian**

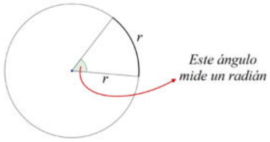
Imagina que dibujas una circunferencia de cualquier tamaño. Luego tomas un hilo de longitud menor a la de la circunferencia, y lo extiendes a lo largo de la curva. Al hacerlo, estarás determinando un ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia, y cuya "apertura" queda delimitada por los extremos del hilo que acabas de colocar.

La razón $l/r$, donde $l$ es la longitud del hilo y $r$ es el radio de la circunferencia, es la medida de ese ángulo en radianes.




Lo anterior implica que si el hilo mide exactamente lo mismo que el radio de la circunferencia, la razón $l/r$, valdrá 1, y el ángulo medirá un radián.

Desde este punto de vista, un radián es la medida del ángulo determinado por una longitud de arco de circunferencia, igual al radio de esa circunferencia.




**1** La rueda tiene 20 canastillas igualmente espaciadas entre ellas. El ingeniero que diseñó esta rueda tuvo que preocuparse por la separación entre cada canastilla, pues necesitaba asegurarse de que quedaran lo suficientemente separadas como para que no golpearan entre sí. Para conocer esta distancia, es necesario primero determinar el ángulo entre una canastilla y la siguiente:

Figura 2.1

I. ¿Cuánto vale el ángulo, en grados, entre una canastilla y la que le sigue? (Sugerencia: recuerda que la circunferencia completa abarca un ángulo de 360°; si hay veinte canastillas y todas están colocadas con la misma separación, ¿en cuántas partes iguales queda dividido ese ángulo?)

II ¿Cuánto vale el ángulo entre canastilla y canastilla, medido en radianes? Expresa esto último como un múltiplo de $\pi$.

### Ejemplo

Se puede obtener una equivalencia entre grados y radianes de la siguiente manera:

Un ángulo de 360º corresponde a un arco cuya longitud es la circunferencia entera; esta longitud (el perímetro de la circunferencia) es $2\pi r$. Desde luego, recuerda que la letra griega $\pi$ ("pi") se usa para representar un número que aproximadamente vale 3.14159.

Por otro lado, un ángulo que mida un radián corresponde a un arco cuya longitud es igual al radio $r$ de la circunferencia.

Ahora bien, ¿cuántos ángulos de un radián "caben" en un ángulo de 360º?

Si lo piensas un momento, te darás cuenta de que la pregunta anterior es equivalente a esta otra:

¿Cuántas veces cabe el radio de la circunferencia en su perímetro?

La respuesta (reflexiónalo con cuidado) es $2\pi r/r = 2\pi$ veces. Entonces, **360º equivalen a 2 $\pi$ radianes**.

De la misma manera, se puede concluir que **180º equivalen a $\pi$ radianes**, equivalencia que en ocasiones es más cómoda de manejar.

Conociendo esto, se pueden emplear las técnicas de la sección *Convirtiendo unidades* para convertir de grados a radianes y viceversa.

Por ejemplo, supongamos que se quiere averiguar a cuántos radianes equivalen 60°. Al aplicar las técnicas estudiadas en la sección *Convirtiendo unidades* de la unidad 1, se tendrá

$$60° \times \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{60\pi}{180} \text{rad}$$

(la abreviatura "rad" significa "radianes"; al efectuar la operación, los grados se "cancelan"). La fracción se puede simplificar, de modo que

$$\frac{60\pi}{180}\text{rad}=\frac{1}{3}\pi\ \text{rad}$$

Aún tendríamos que efectuar la multiplicación de $\frac{1}{3}$ por el número $\pi$; sin embargo, se acostumbra no hacerlo, y dejar la medida en radianes expresada así: como un múltiplo de $\pi$.

De esta manera, 60º equivalen a $\frac{1}{3}\pi$ rad.

Recuerda sólo continuar hasta que hayas encontrado la respuesta a estas preguntas. Sólo hasta entonces, verifica en la parte final del libro que tus respuestas sean correctas.

Mira ahora la figura 2.2.

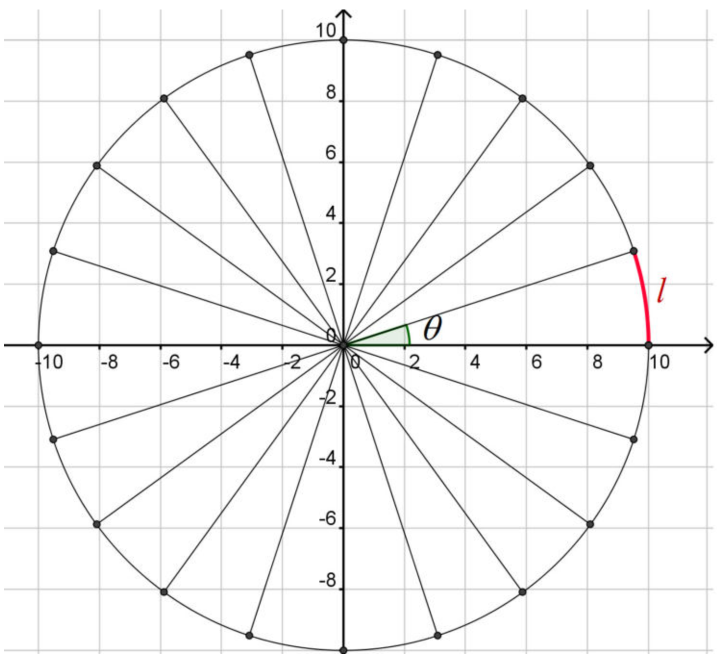



Figura 2.2 Modelo de la rueda de la fortuna, con las canastillas representadas por puntos y con un sistema de referencia colocado en el centro de la rueda.

Ya conoces el valor del ángulo $\theta$ entre canastilla y canastilla, pero no sabes aún la distancia que las separa. En la figura 2.2 esa distancia es la longitud de la curva señalada con la letra $l$. Esa curva es un **arco de circunferencia**, y lo que vas a hacer a continuación es calcular su longitud.

Reflexiona un momento. Si el ángulo $\theta$ valiera 360°, el arco cubriría toda la circunferencia, y entonces su longitud sería simplemente el perímetro de la circunferencia (en la sección *Elementos previos*, se indicó la fórmula para obtener ese perímetro, calcúlalo ahora si no lo has hecho; exprésalo como un múltiplo de $\pi$).

Ahora bien,

I. ¿Qué pasaría si $\theta$ midiera la mitad de los 360°, es decir, 180°? ¿cuánto mediría el arco?

Si sigues esa línea de razonamiento, podrás encontrar una forma de calcular la longitud del arco $l$ entre canastilla y canastilla.

II. Calcula dicha longitud.

La respuesta correcta puedes encontrarla en el lugar de costumbre, pero primero obtén una solución tuya.

Escribe tu razonamiento empleando un procesador de textos, cuaderno u hojas de papel; incluye también la manera en que finalmente calculaste la longitud de este arco. Explica también cómo calcularías la longitud de un arco correspondiente a un ángulo arbitrario (es decir, para un ángulo cualquiera).

Es muy importante que quede claro un punto: el ángulo $\theta$ no es la medida del arco de circunferencia que nos interesa; un ángulo y un arco no son lo mismo, el ángulo es una medida de la apertura entre dos líneas rectas que coinciden en un punto, mientras que un arco es la longitud de una curva.

Otro elemento importante en una circunferencia y que conviene abordar de una vez es el **sector circular**.

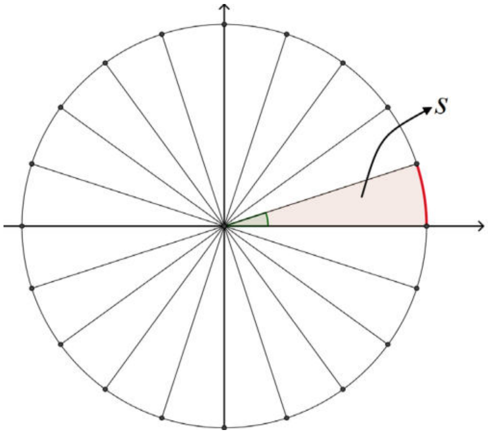



**Figura 2.3** Un sector circular s determinado por un ángulo $\theta$ *en la rueda de la fortuna.*

Un sector circular es la porción de un círculo (recuerda la diferencia entre círculo y circunferencia) limitada por un arco de circunferencia y por los lados de un ángulo central.


I. Calcula el área del sector circular representado en la figura 2.3; emplea para ello un razonamiento similar al que te llevó a calcular la longitud del arco $l$.

No consultes la sección *Respuestas* del Apéndice 1 si no has hallado una solución por cuenta propia.

En un procesador de textos, cuaderno u hojas de papel, escribe con todo el detalle posible el razonamiento y la manera en que calculaste esa medida.

Guarda ambos textos (el correspondiente al arco de circunferencia y éste que acabas de elaborar) en tu portafolio del estudiante. Comparte tus impresiones y resultados con tu experto de confianza.

Pasa a la siguiente sección sólo cuando tus textos estén listos y los hayas discutido con alguien más.


Considera que el satélite perdido, mencionado al inicio de esta unidad, se encuentra en órbita a 10000 km sobre la superficie de la Tierra; considera además que la Tierra es una esfera con un radio de 6370 km. Con ayuda de estos datos, calcula la longitud de la órbita del satélite. Agrega este cálculo, junto con las explicaciones que consideres pertinentes, a tu portafolio del estudiante. (Sugerencia: la órbita del satélite es una circunferencia cuyo radio es la suma del radio de la Tierra, más la altura a la que el artefacto se desplaza; su longitud es simplemente el perímetro de esta circunferencia).

## Señor operador, ¿qué tan rápido vamos?

Cuando una rueda de la fortuna como la de la figura 2.1 se encuentra funcionando, las canastillas se ponen en movimiento siguiendo la trayectoria circular determinada por la rueda. Mira la figura 2.4.

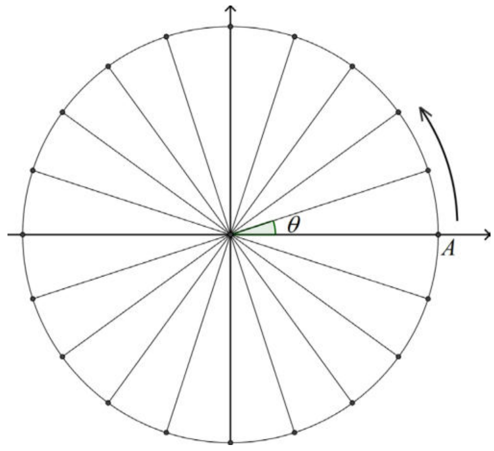



**Figura 2.4** Modelo de la rueda de la fortuna girando en sentido contrario a las manecillas del reloj.

A los pasajeros de la rueda puede interesarles responder la pregunta siguiente: ¿Qué tan rápido se mueve una canastilla?

Cuando la pregunta se considera con cuidado, uno se da cuenta de que en este caso, "qué tan rápido" puede referirse a dos cosas:

- La **distancia** recorrida por una canastilla en un intervalo dado de tiempo, o
- El **ángulo** recorrido por una canastilla en un intervalo dado de tiempo.

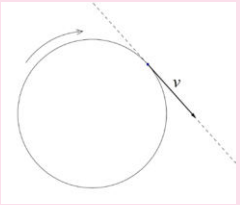
En el primer caso, estamos hablando de la rapidez en el sentido que ya exploramos en la unidad anterior; en un movimiento circular, esta rapidez se llama lineal o **tangencial**, y para hallarla necesitamos determinar la distancia que recorre una canastilla por unidad de tiempo.

En el segundo caso, estamos tratando con una nueva clase de rapidez: la rapidez angular, que básicamente nos dirá cuánto crece el ángulo $\theta$ por unidad de tiempo.

**glosario**

**Tangencial:** a nivel intuitivo, se puede decir que una recta es tangencial a una curva si toca a la curva exactamente en un punto.

La velocidad tangencial recibe ese nombre porque su dirección (recuerda que la velocidad es un vector) es tangente a la circunferencia a lo largo de la cual tiene lugar el movimiento.




La recta punteada es tangente a la circunferencia. La velocidad tangencial *v* del objeto móvil va en la misma dirección que esa recta punteada: es también tangente a la circunferencia.


Vuelve a la figura 2.4. Concentrémonos, para simplificar las cosas, en la canastilla señalada con la letra "A". Una rueda de la fortuna como la que se pone en la feria de Morelia suele girar de manera que da dos vueltas cada minuto. En ese caso,

I. ¿Cuál es la rapidez lineal de la canastilla A?

II. ¿Y su rapidez angular?

## Ejemplo

Supongamos que la rueda da tres vueltas por minuto. Si recuerdas, tiene un radio de 10 m, así que al dar una vuelta una canastilla recorre, a lo largo de la circunferencia, una distancia de aproximadamente $2\pi r = 2\ 3.14\ 10 = 62.8\ m$.

Esto significa que, de acuerdo con nuestra suposición, en un minuto la canastilla recorrerá (siempre a lo largo de la circunferencia) una distancia total de $62.8 \times 3 = 188.4\ m$. Así que su rapidez lineal será de

$$\frac{188.4\ m}{60\ s} = 3.14\frac{m}{s}$$

El razonamiento para hallar su rapidez angular es exactamente el mismo, sólo que debes considerar el ángulo —no la distancia— recorrido por la rueda en ese minuto.

(Sugerencia: la rueda da dos vueltas por minuto. ¿Qué distancia, a lo largo de la circunferencia, recorre la canastilla en este tiempo? ¿Y qué ángulo cubre?)

Expresa la rapidez lineal en metros/segundo, y la angular en rads/segundo.

(A estas alturas, sabes ya dónde hallar las soluciones correctas a la mayoría de las preguntas y problemas que se plantean en este libro; ya sabes también que lo mejor es no revisar esas soluciones correctas mientras no hayas hecho un esfuerzo honesto y sólido por hallar tú mismo(a) las respuestas).

En un movimiento circular,

La **rapidez lineal** o **tangencial** representa la distancia recorrida por el objeto móvil —que en este caso es una longitud de arco circular— por unidad de tiempo. Se calcula de la manera usual, dividiendo distancia recorrida entre tiempo empleado para recorrerla.

Análogamente, la **rapidez angular** representa el ángulo recorrido por el objeto móvil, por unidad de tiempo. La manera de calcularla es dividir el ángulo recorrido entre el tiempo empleado para recorrerlo.

En el movimiento circular hay otros dos parámetros que es conveniente conocer y comprender; se trata del periodo y la frecuencia del movimiento.

El **periodo** es el tiempo que le toma al objeto móvil volver a su posición inicial; este recorrido de ida y vuelta a la posición inicial se conoce como **ciclo**, y es una característica distintiva del movimiento circular y del movimiento armónico simple, que estudiaremos más adelante.

La **frecuencia** es el número de ciclos que el objeto realiza, por unidad de tiempo.

6

I. Vuelve a la rueda de la fortuna y determina el periodo de este movimiento. Exprésalo en segundos.

II Calcula también su frecuencia, y exprésala en unidades de ciclos/segundo (esta unidad se conoce como Hertz, y se abrevia Hz; un Hertz equivale a un ciclo por segundo).

**Ejemplo**

Volviendo a nuestra suposición de que la rueda da tres vueltas en un minuto, y tomando en cuenta que el periodo es el tiempo en que una canastilla vuelve a su posición inicial (es decir, el tiempo en que la rueda da una vuelta completa), puedes darte cuenta de que el periodo sería de $\frac{60\ s}{3} = 20\ s$.

*(Continúa...)*

(Continuación...)

Respecto a la frecuencia, sólo recuerda que se trata del número de ciclos (vueltas completas, en este caso) que se cumplen por unidad de tiempo. Si nuestra unidad de tiempo son los segundos y la rueda completa tres ciclos cada minuto (60 segundos), entonces la frecuencia es simplemente $\frac{3}{60\ s} = 0.05$ ciclos/segundo

**Avanza sólo cuando hayas encontrado las respuestas correctas. Reflexiona en la manera en que las hallaste, y responde:**

III. ¿Cómo calcularías el periodo de un movimiento circular si sólo conoces su frecuencia, y viceversa?

IV. La punta de la hélice de un ventilador encendido se mueve siguiendo una trayectoria circular cuyo radio es de 30 cm, con un periodo de 1 segundo. ¿Cuál es su rapidez lineal? ¿Y su rapidez angular?

V. Determina la frecuencia de un rotor que sigue un movimiento circular uniforme, con una rapidez angular de $\pi/4$ rad/segundo. ¿Cuál es su rapidez angular, en grados/segundo? (Sugerencia: emplea las técnicas estudiadas en la sección *Convirtiendo unidades*).

VI. Determina el periodo y la frecuencia del movimiento de rotación de la Tierra, en segundos y en Hertz, respectivamente.

VII. ¿Cuál es la rapidez angular del minutero en un reloj?, ¿la del segundero?, ¿la de la manecilla de las horas?

**Recuerda anotar todos tus procedimientos y razonamientos. Consulta con tu experto de confianza si crees que necesitas una segunda opinión al respecto.**


La órbita de nuestro satélite perdido (¿recuerdas? El que se menciona al inicio de esta unidad) es circular, al igual que la trayectoria de las canastillas de la rueda de la fortuna. Cierto, el satélite está en órbita a varios kilómetros sobre la superficie terrestre y las canastillas se mueven en un espacio mucho más reducido, pero seguramente habrá características comunes a ambos movimientos, y esas características serán útiles para resolver aquella situación, en la que se quiere determinar la posición del satélite en un momento dado.

Usa las ideas que se abordaron en esta sección para calcular el tiempo que le lleva al satélite dar una vuelta completa a la Tierra, siguiendo la órbita cuya longitud calculaste antes. Parte de que el satélite viaja con una velocidad tangencial de 18000 km/h.

Considera agregar este nuevo cálculo a tu portafolio del estudiante, y luego sigue avanzando.

## *Ecuaciones del movimiento circular uniforme*

Si el movimiento circular de la rueda de la fortuna se lleva a cabo con una rapidez constante, entonces recibe el nombre de movimiento circular uniforme. Ese era el caso en las dos secciones anteriores, pues nunca se mencionó que la rapidez lineal, ni la angular, experimentaran algún cambio.

El hecho de que las canastillas de la rueda de la fortuna estén moviéndose implica que, como en la unidad anterior, tenemos cantidades variables (el tiempo que llevan girando, la distancia que han recorrido **a lo largo de su trayectoria circular**, el ángulo que han avanzado). Además, estas variables están relacionadas unas con otras, de manera que si conocemos el valor de una de ellas, es posible calcular el de las demás.

Es decir, tenemos funciones.

De manera análoga a lo que ocurría en la unidad 1, estas funciones pueden representarse —entre otros medios— a través de tablas, gráficas y ecuaciones.

Por ahora nos concentraremos en las ecuaciones, y comenzaremos con la ecuación correspondiente a la distancia recorrida por una canastilla en un tiempo determinado.

En la sección *Señor operador, ¿qué tan rápido vamos?*, se afirmó que la rapidez lineal en un movimiento circular se calcula dividiendo la longitud del arco circular recorrido entre el tiempo empleado para recorrer dicha longitud; simbólicamente,

$$v = \frac{l}{t}$$

Donde estamos usando $v$ para representar a la rapidez, $l$ para la longitud del arco circular recorrido y $t$ para el tiempo. Si ahora despejas $l$, llegarás a

$$l = vt$$

Sólo hace falta tomar en consideración la posibilidad de que una canastilla comience su movimiento desde una posición “adelantada”; mira la figura 2.5.

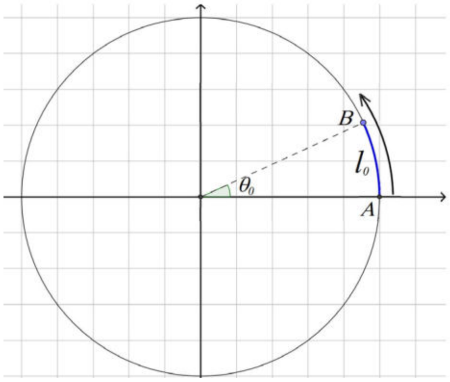



Figura 2.5 Modelo de la rueda de la fortuna. Sólo se han conservado la circunferencia que forma la rueda y dos posiciones hipotéticas para una de las canastillas

Tomaremos como "posición cero" la posición de la canastilla A en esta figura. Si por alguna razón al iniciar nuestro análisis la canastilla no se encuentra en esa posición cero sino, digamos, en la posición señalada con la letra B, la ecuación $l = vt$ sólo nos dirá la longitud de arco que la canastilla va avanzando a partir de esa posición adelantada; para hallar la longitud del arco que la canastilla ha recorrido sobre la rueda desde la posición cero, tendremos que sumar la longitud del arco correspondiente a la posición adelantada, la cual aparece en la figura 2.5 señalada como $l_0$. Simbólicamente, esto se escribe

$l = vt + l_0$ *Ecuación del movimiento circular uniforme (variables lineales)*

Compara esta ecuación con

$$d = vt + d_0$$

que describía la distancia recorrida por un objeto en movimiento rectilíneo uniforme. ¿Notas algo en particular?

Ambas clases de movimiento (el rectilíneo uniforme y el circular uniforme) son análogas en muchos sentidos; los objetos móviles recorren ciertas distancias en determinados tiempos, a una rapidez constante. Sin embargo, es importante que diferencies claramente ambas ecuaciones: la ecuación $d = vt + d_0$ se refería a una distancia recorrida en línea recta, mientras que $l = vt + l_0$ habla de una distancia recorrida a lo largo de una circunferencia.

Además, a diferencia del movimiento rectilíneo uniforme, en el circular uniforme la distancia y el tiempo no son las únicas variables; también está el ángulo que el objeto móvil cubre en su trayectoria circular:

Emplea un argumento análogo al que llevó a la ecuación $l = vt + l_0$, refiriéndote esta vez a la rapidez angular $\omega$ (omega), al ángulo $\theta$ recorrido por una canastilla y al posible ángulo inicial $\theta_0$ desde el que la canastilla podría comenzar su movimiento, para deducir la ecuación

$\theta = \omega t + \theta_0$ *Ecuación del movimiento circular uniforme (variables angulares)*

Ambas ecuaciones,

$$l = vt + l_0 \qquad \textit{Ecuaciones del movimiento circular uniforme}$$
$$\theta = \omega t + \theta_0$$

describen una parte muy importante de esta clase de movimiento, aunque todavía no de manera completa; hace falta establecer la relación que existe entre la rapidez lineal $v$ y la angular $\omega$. Eso lo harás en la sección *En otra parte de la feria*. Pero antes…


Emplea las ecuaciones del movimiento circular uniforme para determinar:

I. La longitud del arco y del ángulo (ambos los medirás siempre desde la “posición cero” de la figura 2.5) a los que llega una canastilla de esta rueda de la fortuna al cabo de un minuto, si al comenzar el movimiento se encontraba en una posición inicial de 30° sobre la “posición cero”. Considera la misma velocidad lineal que se calculó en la sección *Señor operador, ¿qué tan rápido vamos?* (debiste haber encontrado que vale aproximadamente 2.09 m/s).

## Ejemplo

Supongamos que la rueda da tres vueltas por minuto, como en el ejemplo planteado en la sección *Señor operador, ¿qué tan rápido vamos?*, por lo que la velocidad lineal es de 3.14 m/s, y que inicialmente la canastilla se encontraba 15º por encima de la “posición cero”; esto significa que su longitud de arco inicial es de aproximadamente $l_0 = \frac{2\pi(10)(15°)}{360°} = 0.83\pi$ (en la sección En la rueda de la fortuna debiste reflexionar sobre la manera de calcular la longitud de un arco, conociendo el ángulo que lo forma).

Lo anterior implica que la ecuación

$$l = vt + l_0$$

se convierte en

$$l = 3.14t + 0.83\pi$$

Entonces, después de un minuto (60 segundos) la canastilla habrá cubierto una longitud de arco de aproximadamente

$$l = 3.14(60) + 0.83\pi = 188.4 + 2.61 = 191.01\, m$$

(Siempre recuerda que el número $\pi$ vale aproximadamente 3.14159)

Para calcular el ángulo que ha cubierto se necesita el mismo razonamiento, pero empleando la ecuación

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

(Continúa...)

*(Continuación...)*

Bajo el mismo supuesto, la velocidad angular $\omega$ es de $\frac{\pi}{10} rad/s$ (revisa los resultados que obtuviste en la sección *Señor operador, ¿qué tan rápido vamos?*), y la canastilla comienza su movimiento a partir de un ángulo inicial $\theta_0$ que vale 15º sobre la "posición cero". Primero, convertimos estos 15º a radianes,

$$15° \times \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{15\pi}{180} \text{ rad} = \frac{1}{12}\pi \text{ rad}$$

Y ahora sustituimos la velocidad angular y este ángulo inicial en $\theta = \omega t + \theta_0$, quedando

$$\theta = \frac{\pi}{10}t + \frac{1}{12}\pi$$

Después de un minuto (60 segundos), la canastilla habrá cubierto un ángulo de

$$\theta = \frac{\pi}{10}(60) + \frac{1}{12}\pi = 6\pi + \frac{1}{12}\pi = \frac{73}{12}\pi \text{ rad}$$

II. Realiza el mismo cálculo, pero para otra canastilla que al comenzar el movimiento se hallaba en una posición inicial de –20° (antes de comenzar, averigua qué significa que el ángulo sea negativo y dibuja aquí a la izquierda la posición de la canastilla).

III. Encuentra el tiempo que le toma a la primera canastilla llegar a una longitud de arco de 40 metros.

IV. Calcula el tiempo en que la segunda canastilla llega a un ángulo de 270°.

V. Determina el tiempo en que una persona, sentada en la línea del ecuador terrestre, recorre una longitud de arco de 100 km, como consecuencia del movimiento de rotación de la Tierra (sí, aunque pienses que no te estás moviendo, la Tierra nos "arrastra" a todos con ella a una velocidad bastante impresionante; para tus cálculos supón que el planeta tiene una forma perfectamente esférica).

VI. ¿Qué ángulo recorre esa persona en ese tiempo?

VII. Una rueda que tiene 8 rayos y 30 cm de radio está girando en torno a un eje fijo, a razón de 2.5 revoluciones por segundo (es decir, da 2 y media vueltas cada segundo). Alguien te reta a dispararle una flecha de 24 cm de longitud en dirección paralela al eje de rotación de la rueda, de manera que la flecha pase al otro lado sin tocar la rueda ni ninguno de los rayos. Observa la figura 2.6 para aclarar la situación.

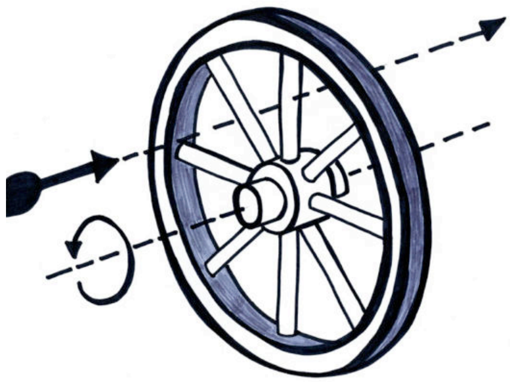


Figura 2.6

¿Qué velocidad mínima deberá tener la flecha para lograrlo?

VIII. ¿Importa a dónde apuntes la flecha, entre el eje y la rueda? De ser así, ¿cuál es la mejor ubicación?

¿Notas cómo es posible obtener información sobre la posición de un objeto en movimiento circular a partir de datos como su frecuencia, su velocidad angular o el radio de su trayectoria? La situación es parecida a lo que ocurría en la primera unidad, cuando por ejemplo podías determinar la posición de un objeto en movimiento rectilíneo, a partir de parámetros como su velocidad o su aceleración.

Esto significa que sí existe una manera de localizar al satélite perdido del problema planteado al inicio de la unidad, y de conocer el momento en que se debe enviar la señal que permitirá recuperarlo, de modo que podamos estar seguros de que dicha señal efectivamente llegará hasta él.

Ya conoces la longitud de su órbita, así como el tiempo que le toma dar una vuelta completa a nuestro planeta. Calcula ahora la frecuencia de su movimiento y su velocidad angular. Incluye estos cálculos en tu portafolio del estudiante.

## *La altura de la canastilla… un análisis gráfico y algebraico*

Al girar la rueda de la fortuna, las canastillas van alcanzando diferentes alturas sobre el suelo. Lo que haremos en esta sección es analizar la evolución de la altura de una canastilla, conforme transcurre el tiempo de rotación.

Estás trabajando para utilizar software matemático para la representación e interpretación del movimiento circular

Para ello, necesitamos decidir primero en dónde colocaremos nuestro sistema de referencia: las dos opciones más plausibles se muestran en las figuras 2.7 y 2.8:

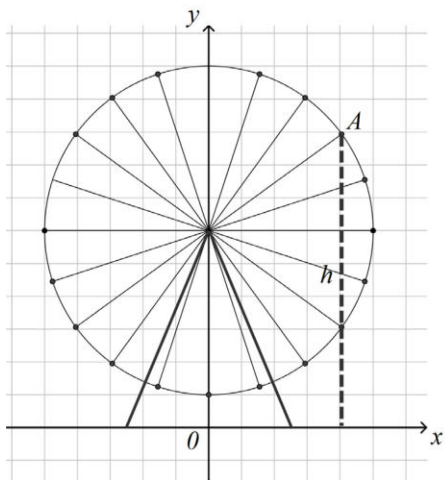



Figura 2.7 Rueda de la fortuna, con sistema de referencia colocado en el suelo, directamente debajo de su centro..

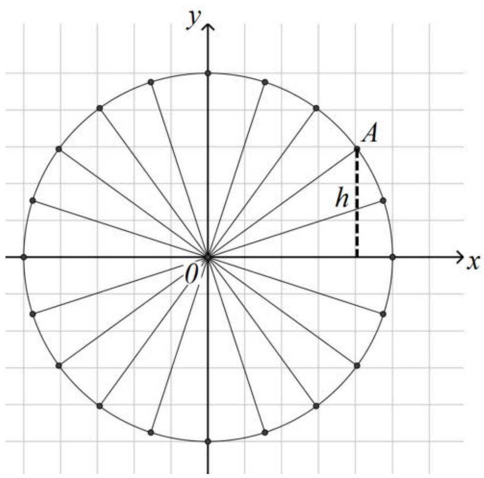



Figura 2.8 Rueda de la fortuna, con sistema de referencia colocado en el centro de la rueda.

Colocaremos el sistema de referencia como en la figura 2.8, que es la forma en que lo hemos hecho en las secciones anteriores. Nota que las alturas que obtengamos en este sistema de referencia se medirán respecto al centro de la rueda, pero eso no es una desventaja; si quieres saber a qué altura sobre el suelo se encuentra la canastilla, simplemente suma la altura que obtengamos más la altura del centro de la rueda.

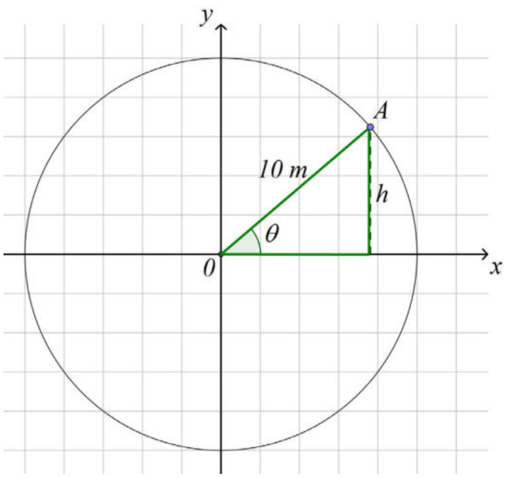



Figura 2.9

Echa ahora un vistazo a la figura 2.9.

En esta figura hemos aislado la canastilla A; nos interesa calcular su altura *h*, respecto a la altura del centro de la rueda. Nota que se ha resaltado en verde el triángulo rectángulo que forman la altura, el radio de la rueda (que mide 10 metros) y la proyección de ese radio sobre el eje *x* de nuestro sistema de referencia.

En la sección *Vectores y una breve introducción a la Trigonometría*, estudiaste cómo calcular las componentes axiales de un vector. Para ello, tuviste que emplear dos de las razones trigonométricas del ángulo $\theta$ que da dirección al vector, y obtuviste que

$$r_x = r \cos \theta$$
$$r_y = r \operatorname{sen} \theta$$

Si comparas la figura 1.18 con la figura 2.9, verás que la altura $h$ de la canastilla coincide con la componente $r_y$ del vector $r$, de manera que podemos escribir

$$h = 10 \text{ sen } \theta$$

Toma en cuenta que al girar la rueda, la altura $h$ y el ángulo $\theta$ son variables; la ecuación anterior establece que entre ellas existe una relación que permite, conociendo $\theta$, calcular $h$ (y viceversa, al menos en principio); es decir, $h = 10$ sen $\theta$ representa la función ángulo-altura para la canastilla A. Revisa al respecto la sección *Funciones y movimiento*.

Ahora obtendrás la gráfica que corresponde a la ecuación $h = 10$ sen $\theta$. Para ello, emplearás el programa Geogebra, con el que construirás un modelo abstracto de la rueda de la fortuna y la canastilla (si la computadora en la que vas a trabajar no tiene Geogebra, descárgalo desde la página http://www.geogebra.org, e instálalo).

Ejecuta Geogebra y sigue las instrucciones que se especifican a continuación:

Emplea la herramienta “Circunferencia dados su centro y uno de sus puntos” para construir una circunferencia cuyo centro sea el origen del plano, y cuyo radio valga 10. Esta circunferencia representará la rueda de la fortuna.

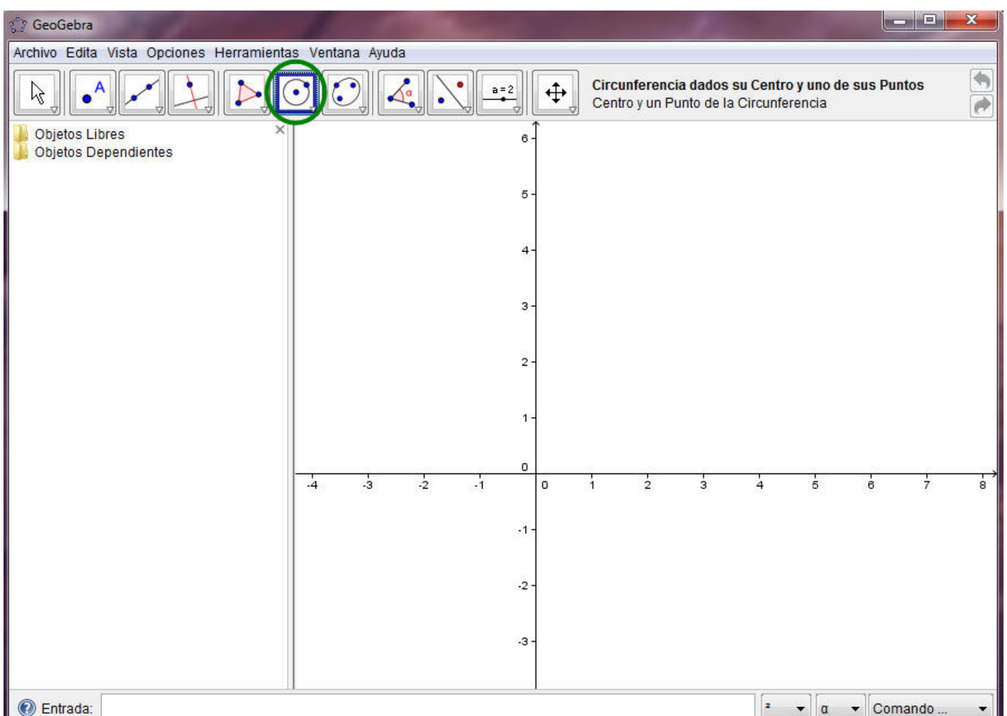



Figura 2.10

De ser necesario, usa la herramienta "Zoom de alejamiento" para poder visualizar toda la circunferencia.

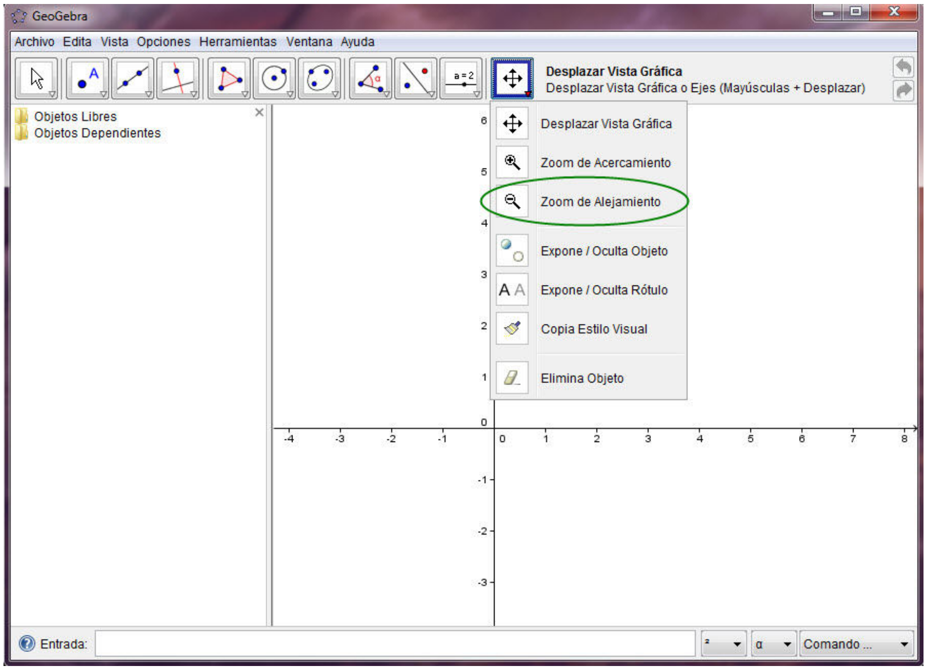



Figura 2.11 Pantalla muestra con la herramienta *Zoom de alejamiento*.

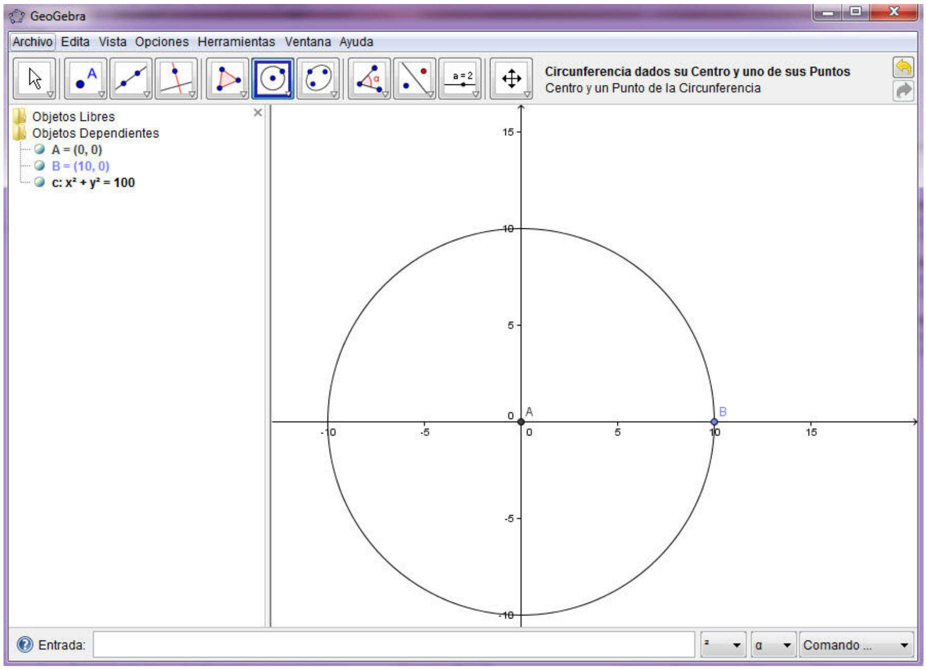



Figura 2.12 Aspecto de la circunferencia que debes construir.

Con la herramienta "Nuevo punto", construye un punto sobre la circunferencia seleccionando la herramienta y haciendo clic en cualquier punto sobre la curva. Este punto representará a la canastilla cuyo movimiento analizaremos.

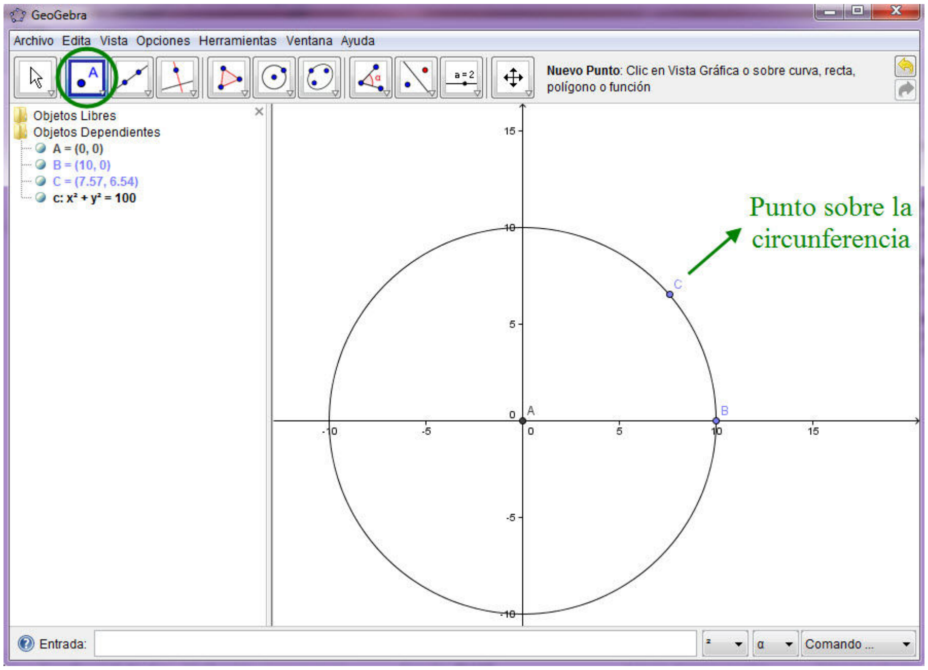



Figura 2.13

Ahora emplea la herramienta "Recta perpendicular" para construir una recta **perpendicular** al eje *x*, a través del punto que construiste en el paso anterior (que aquí aparece señalado con la letra "C"). Para lograrlo, selecciona la herramienta, luego haz clic sobre el eje *x* y a continuación sobre el punto "C".

Ahora usa la herramienta "Segmento entre dos puntos" para construir un segmento que vaya del punto "A" al punto "C". Para dibujarlo, selecciona la herramienta y a continuación haz clic sobre el punto "A" y luego sobre el punto "C".

Finalmente, construye el ángulo $\theta$ entre el eje "*x*" y el segmento que acabas de construir. Selecciona la herramienta "Ángulo", haz clic en el eje "*x*" y luego en el segmento en cuestión (en ese orden).

Al final, tu construcción debe parecerse a la figura 2.17, que verás al final de la construcción del ángulo.

Observa el triángulo que aquí se ha resaltado en color verde. Nota que la altura de la canastilla coincide con la coordenada "*y*" del punto "C". En la figura 2.17, esa altura vale 6.54.

Recuerda además, que esa altura viene dada por la ecuación

$$h = 10 \text{ sen } \theta$$

**glosario**

**Perpendicular:** dos rectas son perpendiculares si al cortarse forman ángulos rectos.

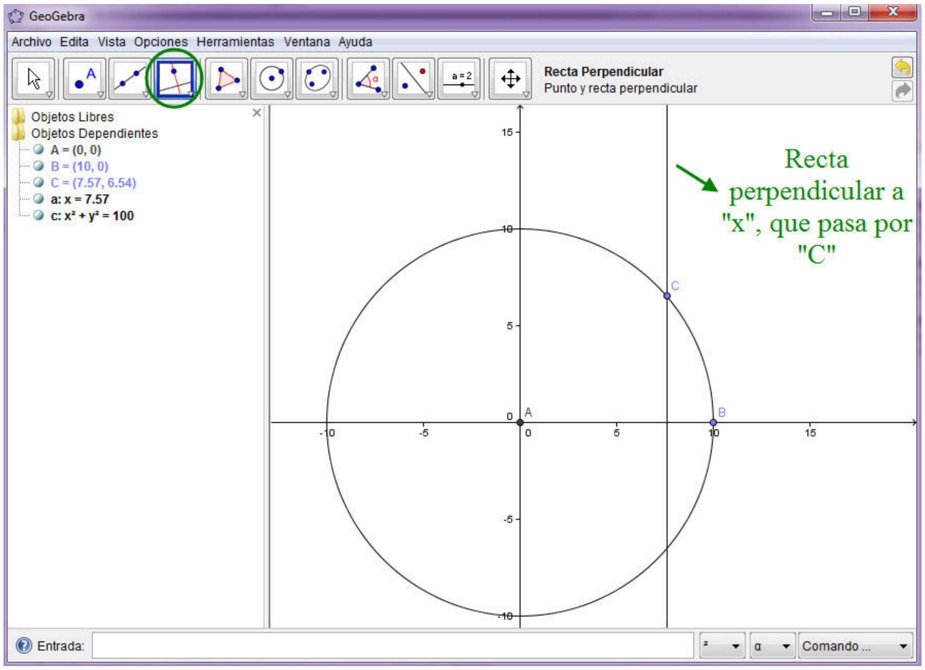



Figura 2.14

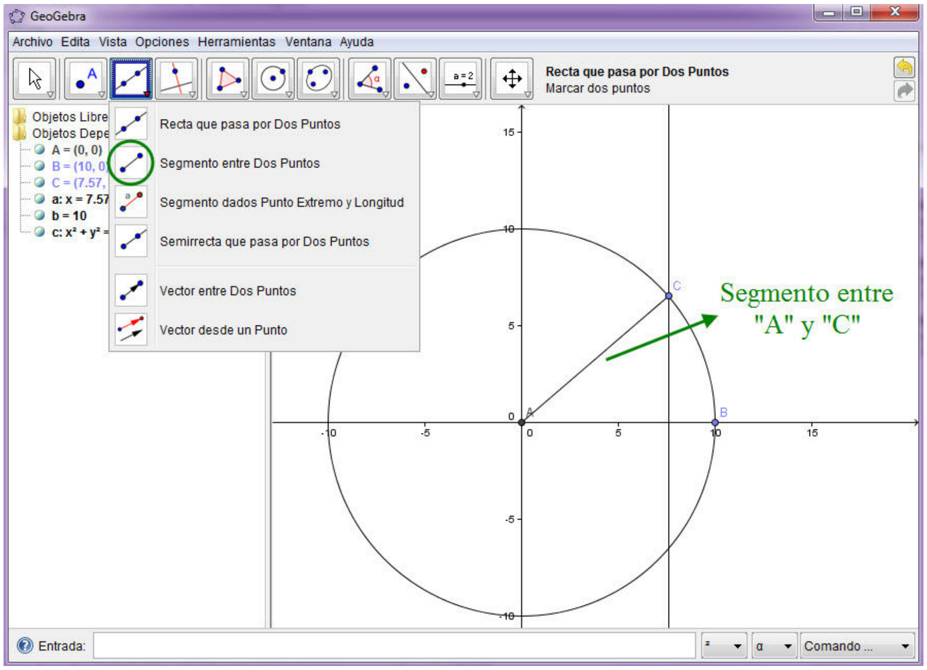



Figura 2.15

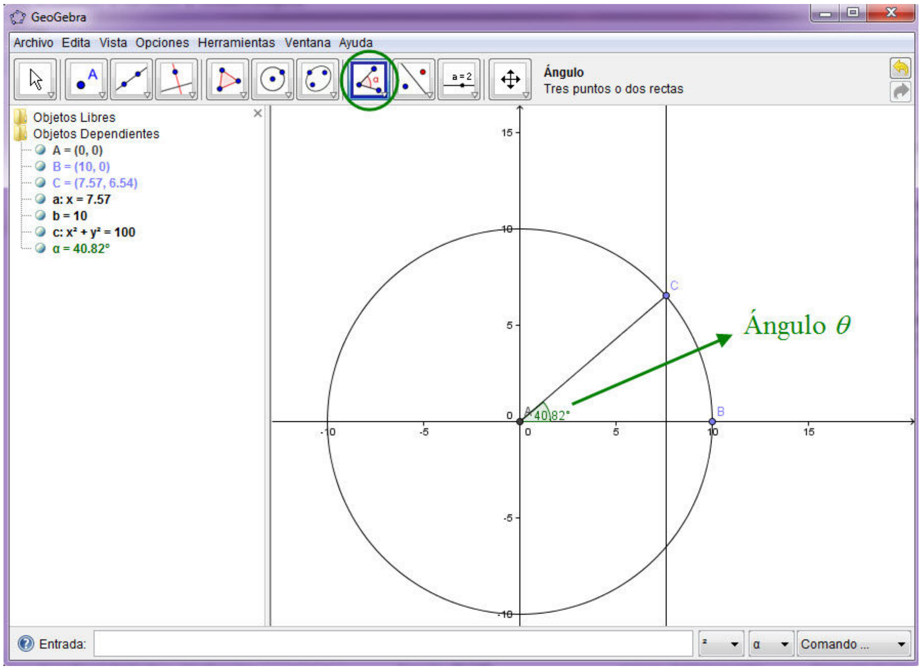



Figura 2.16

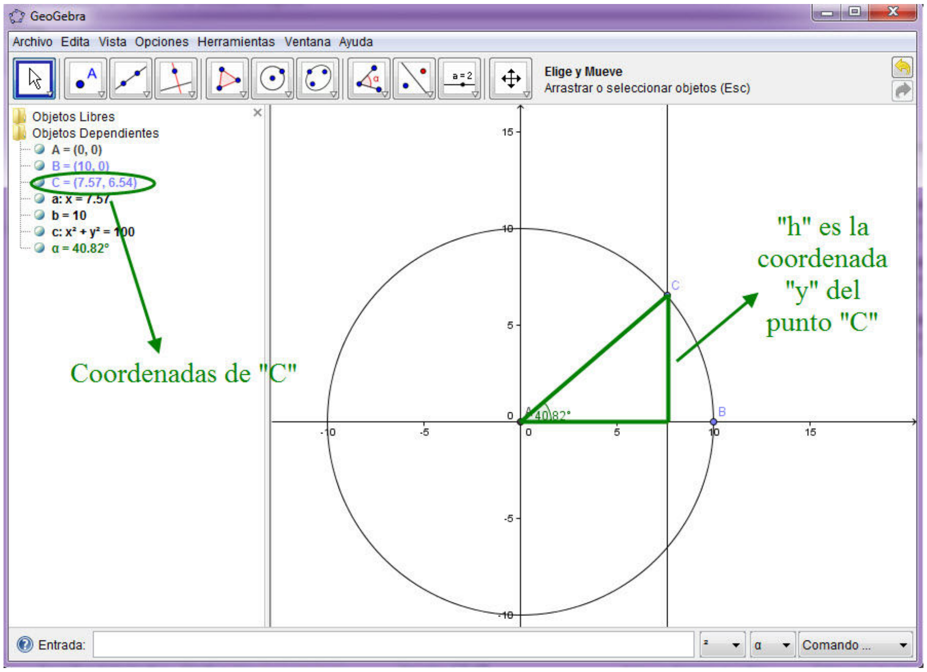



Figura 2.17 El triángulo verde se ha resaltado para fines de esta impresión. (En el programa no aparecerá así.)

Queríamos obtener la gráfica de esta ecuación; para lograrlo, mueve el punto “C” seleccionando la herramienta “Elige y mueve”, y luego arrastrándolo con el ratón en sentido contrario a las manecillas del reloj. Al hacerlo notarás cómo $h$ va cambiando conforme el ángulo $\theta$ va aumentando su valor.

Registra en una hoja de cálculo electrónica varias parejas de valores ($\theta$, $h$). Registra por lo menos diez de ellas, comenzando desde un ángulo de cero grados y moviéndolo a intervalos iguales (por ejemplo, de 30 en 30 grados), hasta darle una vuelta completa a la rueda. Luego emplea la hoja de cálculo para dibujar una gráfica de dispersión para estas parejas.

### Gestión del aprendizaje

Alternativamente, puedes emplear las técnicas estudiadas en la sección *Graficando manualmente* para dibujar esta gráfica sin ayuda de la computadora. Necesitarías construir una tabla de valores $\theta$ vs $h$ y llenarla asignándole distintos valores al ángulo $\theta$, para luego calcular los correspondientes valores de $h$ mediante la ecuación (2.4), $h = 10 \text{ sen } \theta$. Para lograrlo usa una calculadora científica, asegurándote de que está ajustada para manejar los ángulos en grados.

Si vas a hacerlo así, es recomendable que asignes a $\theta$ valores de 0º hasta por lo menos 400º, avanzando en intervalos de 30º en 30º (si tomas más valores o avanzas en intervalos más pequeños, tu gráfica quedará más detallada).

Por ejemplo, si asignas al ángulo $\theta$ los valores de 0º, 15º, 30º y 45º, los primeros renglones de esa tabla quedarían de la siguiente manera (toma una calculadora científica y asegúrate de obtener los mismos valores que se muestran en la columna correspondiente a $h$):

| $\theta$ | $h = 10 \text{ sen } \theta$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 15 | 2.59 |
| 30 | 5 |
| 45 | 7.07 |

A continuación, necesitarías dibujar un par de ejes cartesianos en hojas de papel (si pudieras usar papel milimétrico sería mucho mejor) y localizar cada una de esas parejas en el plano. Conforme dibujes más y más parejas, irás obteniendo la gráfica que necesitas.

Una vez que tu gráfica esté completa, responde cuidadosamente:

I. ¿Entre qué valores oscila la altura $h$ de la canastilla?

_______________________________________________

_______________________________________________

II. ¿Qué pasa con el valor de $h$ cuando el ángulo rebasa los 180°? ¿Por qué ocurre eso?

_______________________________________________

_______________________________________________

_______________________________________________

III. ¿Qué ocurre cuando llegas a los 360°?

IV. ¿Qué sucederá con los valores de *h* —y con la gráfica— si continúas dando vueltas alrededor de la rueda?

Ya sea que hayas obtenido tu gráfica con ayuda de la computadora o dibujándola manualmente, pasa a la siguiente sección sólo cuando hayas dado respuesta detallada a cada una de estas preguntas.

## Funciones trigonométricas y el círculo unitario

Una función como la representada por la ecuación

$$h = 10 \text{ sen } \theta$$

Cuya gráfica obtuviste en la sección anterior, recibe el nombre de **función trigonométrica**. Las funciones trigonométricas involucran (como su nombre lo indica) razones trigonométricas de alguna de las variables, y se caracterizan por presentar ciclos que se repiten indefinidamente, cada vez que la variable independiente —en este caso, el ángulo $\theta$— llega a ciertos valores.

El intervalo que esa variable debe recorrer para que se cumpla un ciclo se llama **periodo** de la función; esta característica hace que a las funciones trigonométricas también se les llame **periódicas**.

Una manera útil de concebir a las funciones trigonométricas es mediante lo que se conoce como el círculo unitario. Mira la figura 2.18.

El punto A está colocado sobre la circunferencia del círculo, posibilitando la construcción del triángulo en azul cuya hipotenusa es el radio del círculo, y cuyos catetos son las coordenadas $(b, c)$ del punto $A$. Empleando este círculo (cuyo radio vale 1, de donde le viene el nombre de "unitario") y recordando lo estudiado en la sección *Vectores y una breve introducción*

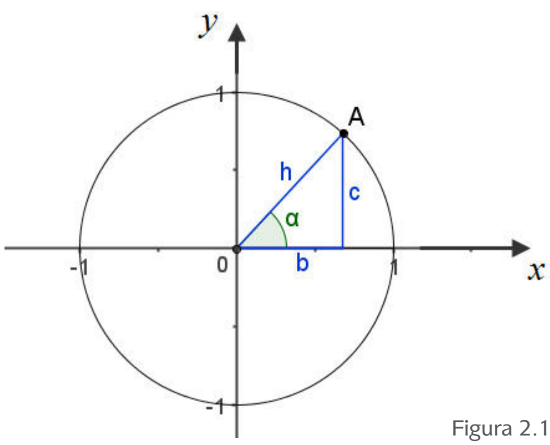



Figura 2.18

*a la Trigonometría*, las seis funciones trigonométricas del ángulo $\alpha$ se pueden definir como sigue:

$$\text{sen}\,\alpha = \text{c}$$

$$\cos\alpha = \text{b}$$

$$\tan\alpha = \frac{c}{b}$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{b}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{c}$$

(Recuerda que la hipotenusa del triángulo es el radio del círculo, y vale 1).

Considera, por ejemplo, la función $y = \text{sen}\,\alpha$. Puedes darte una buena idea del aspecto de su gráfica empleando el círculo unitario y un poco de imaginación:

Cuando el ángulo $\alpha$ vale cero, las coordenadas del punto $A$ son (1, 0). Es decir, su coordenada $c$ es cero. Esto significa que sen $\alpha$ también vale cero.

Conforme el punto $A$ comience a moverse a lo largo de la circunferencia en sentido contrario a las manecillas del reloj, ocurrirá que $\alpha$ también aumentará su valor, al tiempo que lo hace la coordenada $c$. Por lo tanto sen $\alpha$ aumentará también, situación que se mantendrá hasta que $\alpha$ llegue a los 90° (o lo que es lo mismo, $\pi/2$; en la sección *En la rueda de la fortuna* se exploró cómo convertir de grados a radianes, revísala si lo consideras necesario). En esa posición, la coordenada $c$ del punto $A$ valdrá 1 y ese será el máximo valor que alcanzará sen $\alpha$.

A continuación, cuando $A$ siga trasladándose sobre la circunferencia, $\alpha$ seguirá creciendo pero la coordenada $c$ comenzará a disminuir, con lo que también disminuirá sen $\alpha$. Esto continuará así hasta que $\alpha$ alcance los 270° (o $3\pi/2$ rad). En ese momento, sen $\alpha$ llegará a su mínimo valor, –1.

Si el desplazamiento de $A$ continúa, sen $\alpha$ comenzará a aumentar de nuevo, desde –1 hasta volver al punto de partida, cuando $\alpha$ valga 360° (equivalentes a $2\pi$ rad). En ese punto, sen $\alpha$ valdrá cero de nuevo, y se habrá cumplido una primera vuelta al círculo unitario: un primer ciclo, un primer periodo.

Ese comportamiento comenzará a repetirse si la rotación de $A$ sigue adelante: sen $\alpha$ aumentará hasta llegar a 1, luego decrecerá hasta –1 y de ahí subirá de nuevo a cero cuando $A$ complete una vuelta más al círculo unitario.

Todo ello dará como resultado una gráfica cuyo aspecto será parecido al que obtuviste en la sección anterior:

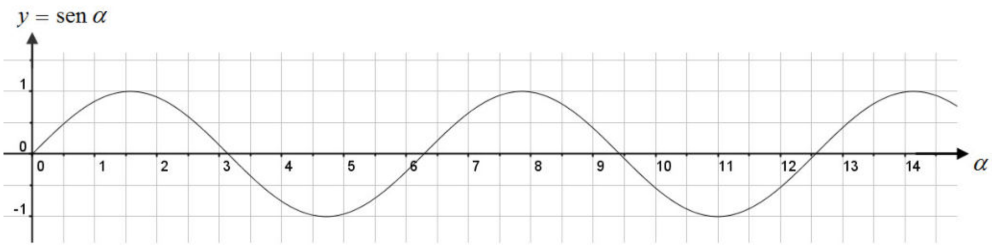



Figura 2.19

Observa que en esta gráfica, sen $\alpha$ varía entre 1 y $-1$, a diferencia de la que obtuviste en la sección precedente, que variaba entre 10 y $-10$. En un momento volveremos a ese tema y entraremos en más detalles.

Por otro lado, fíjate que en esta gráfica $\alpha$ se ha expresado en radianes (siendo que antes se le había expresado en grados). Ello hace que los ciclos de la gráfica no se cumplan cada 360°, sino cada $2\pi$ rad: es decir, cada 6.28 unidades, aproximadamente (recuerda cuánto vale el número $\pi$).

## Funciones trigonométricas y movimiento armónico simple

Una función trigonométrica, como las que acabamos de analizar:

$$h = 10 \text{ sen } \theta$$
$$y = \text{sen } \alpha$$

Se caracteriza por que la variable dependiente ("$h$" en el primer caso; "$y$", en el segundo) se comporta oscilando entre un valor máximo y un valor mínimo, a partir de una "posición de equilibrio". En el primer caso, los valores máximo y mínimo eran 10 y $-10$ respectivamente, alrededor de la posición de equilibrio $h = 0$; en el segundo los valores máximo y mínimo fueron 1 y $-1$, alrededor de la posición de equilibrio $y = 0$.

A la magnitud de la máxima desviación de la variable dependiente a partir de dicha "posición de equilibrio", se le llama **amplitud** de la función.

Observa la figura 2.20.


De acuerdo con lo anterior, ¿cuánto valen el periodo y la amplitud de la función trigonométrica $h = 10$ sen $\theta$?

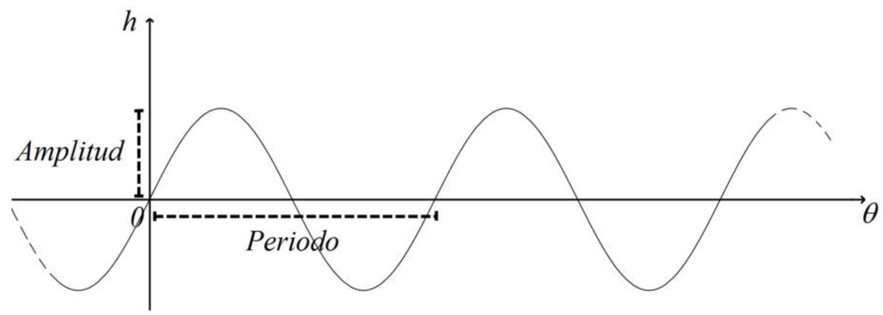



Figura 2.20 La gráfica de una función trigonométrica. El periodo es el intervalo que debe cubrir la variable independiente (en este caso, $\theta$) para que un ciclo se repita. La amplitud es la magnitud de la máxima desviación de la variable dependiente ($h$, en este caso) a partir de su "posición de equilibrio".

Sólo sigue adelante cuando tengas listas ambas respuestas.

Un movimiento que queda descrito por una función de las características recién señaladas, se llama **armónico simple**.

El movimiento armónico simple aparece en muchos aspectos de la vida cotidiana, particularmente en esta época de avances tecnológicos.

¿Puedes pensar en cinco ejemplos de movimientos que presenten las características del movimiento armónico simple? Consúltalo con tu experto de confianza, y/o fuentes bibliográficas o electrónicas y escribe una lista. Determina cuál sería el periodo para cada uno de estos movimientos, cuál su frecuencia y cuál su amplitud.

(Sugerencia: de acuerdo con lo que se acaba de discutir, necesitas pensar en movimientos que presenten ciclos que se repitan, de modo que alguna de las variables involucradas oscile entre dos valores determinados cada vez que la otra variable cumpla con cierto periodo.)

**UN MOMENTO DE REFLEXIÓN**

En el problema planteado al inicio de la unidad, ¿será armónico simple el movimiento del satélite perdido alrededor de nuestro planeta?, ¿qué tendría que suceder para que lo fuera? , ¿y qué para que no lo fuera?

Escribe una breve reflexión respecto a estas preguntas y considera incluirlas en tu portafolio del estudiante, para ello toma en cuenta si es parte importante de tu aprendizaje y si podrías recurrir a él más adelante para la solución final del problema.

## *Profundizando en las funciones trigonométricas*

Vuelve por un momento a la ecuación

$$h = 10 \text{ sen } \theta$$

Si recuerdas, $h$ representaba la altura de una de las canastillas de la rueda de la fortuna. Esta ecuación describe la forma en que dicha altura varía conforme el ángulo $\theta$ va cambiando, como resultado del giro de la rueda. Cuando se habla de funciones trigonométricas, al ángulo $\theta$ se le denomina "argumento" de la función. En la sección *La altura de la canastilla… un análisis gráfico y algebraico*, medimos el argumento en grados, y todos los cálculos, así como la gráfica, se realizaron bajo ese supuesto. Por otra parte, en la sección *Funciones trigonométricas y el círculo* *unitario*, se trabajó con el argumento expresado en radianes. Esta última opción resulta más conveniente, pues un radián es lo que se conoce como un número real puro, mientras que los grados no lo son. Esto hace que el hecho de emplear grados traiga dificultades cuando se quiere trabajar con funciones trigonométricas en aplicaciones matemáticas a nivel profesional, dificultades que desaparecen si los argumentos se manejan en radianes.

Es por ello que de aquí en adelante el argumento de una función trigonométrica lo expresaremos siempre en radianes.

### Gestión del aprendizaje

Aunque siempre es posible dibujar la gráfica de una función manualmente, sin recurrir a la ayuda de una computadora (sección *Graficando manualmente*), las actividades siguientes requieren dibujar bastantes gráficas y hacerlo de manera manual podría resultar muy laborioso; te recomendamos ampliamente que lo hagas con ayuda de una computadora. Acude a un café internet o a una biblioteca si no tienes una en casa.

Por supuesto, si así lo prefieres, puedes realizar las gráficas manualmente, utilizando papel milimétrico o un cuaderno.

### Para saber más

En la historia de la humanidad, los primeros números en emplearse fueron los llamados Números Naturales, que son los que se necesitan para contar: 1, 2, 3, 4,…

Con el tiempo se percibió la necesidad de emplear también números negativos (…, −3, −2, −1), que junto con los Naturales forman a los Números Enteros.

Pronto fue necesario reconocer que se necesitaba usar fracciones; los Números Racionales, son el conjunto de todos los números que se pueden expresar como una fracción.

Existe, sin embargo, una clase de números (como el número $\pi$) que no se pueden expresar como una fracción. Estos reciben el nombre de Números Irracionales.

La unión de los Números Racionales (que si lo piensas, incluyen a los Enteros) con los Irracionales da lugar a lo que conocemos como Números Reales.

Por otro lado, un Número Real Puro es aquel que no tiene unidades. Por ejemplo, las distancias, tiempos, y ángulos medidos en grados no son números reales puros porque tienen unidades (metros, segundos y grados, respectivamente).

Si en cambio los ángulos se “miden” empleando radianes, las cantidades obtenidas sí son números reales puros. Esto es debido a la forma en que se define a los radianes: son una razón $l/r$, donde $l$ es la longitud del arco que delimita al ángulo en cuestión, y $r$ es el radio de la circunferencia involucrada. Aunque $l$ y $r$ tengan unidades, al realizar el cociente $l/r$ las unidades se cancelan, por lo que un radián es un número sin unidades: es un Número Real Puro.

**12** Abre un nuevo documento en Geogebra. Introduce la ecuación

$$h = 10 \text{ sen } \theta$$

en el campo entrada, escribiendo “sin” en lugar de “sen” (el programa sólo reconoce el nombre inglés de la **razón seno**), “*x*” en lugar de “$\theta$”, y “*y*” en lugar de “*h*” (Geogebra sólo reconoce a la letra “*x*” como variable independiente, y a la letra “*y*” como variable dependiente). De este modo, la ecuación se verá así:

$$y = 10 \sin (x)$$

Los paréntesis son necesarios para que el software reconozca a “sin” como la función seno. Presiona la tecla “intro” cuando hayas terminado de introducir la ecuación, y Geogebra dibujará su gráfica. De ser necesario, emplea la herramienta “Zoom de alejamiento” para apreciar la gráfica completa.

Obsérvala con atención.

I. ¿Cuánto vale su periodo?

Notarás que ya no es de 360°. Lo que sucede es que Geogebra está midiendo el argumento en radianes, no en grados.

II. ¿A cuántos radianes equivalen 360°?

III. ¿Es esto consistente con el periodo de la gráfica según Geogebra?

Mira bien tu gráfica antes de responder esta última pregunta. Luego, pasa a la siguiente sección.

### Gestión del aprendizaje

En caso de que decidas dibujar manualmente las gráficas de las secciones siguientes, recuerda que para hacerlo necesitas construir una tabla de valores ($x$, $y$), y luego localizar las parejas de valores en el plano cartesiano.

Por ejemplo, si deseas obtener la gráfica de la función $y = 10$ sen x, deberás asignarle valores a la variable $x$, para luego calcular los correspondientes valores de $y$; para ello puedes auxiliarte con una calculadora científica, tomando en cuenta que esta vez, $x$ debe estar expresada en radianes (no en grados). Debido a esto tendrás que asegurarte de que tu calculadora está interpretando los ángulos en radianes; el modo exacto de llevar a cabo ese ajuste depende del modelo de tu calculadora; de ser necesario consulta su instructivo para obtener información al respecto.

Es conveniente que asignes a $x$ valores desde 0 hasta por lo $2\pi$ radianes, avanzando en intervalos de que sean múltiplos fraccionarios de $\pi$; una longitud recomendable para tus intervalos es de $\frac{1}{6}\pi$. Si avanzas en intervalos más pequeños, tu gráfica quedará más detallada.

Si decides hacerlo así, puedes auxiliarte con esta tabla, que muestra los primeros cinco valores de la función $y = 10$ sen $x$, tomando intervalos de longitud $\frac{1}{6}\pi$ para la variable $x$:

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| $\frac{1}{6}\pi$ | 5 |
| $\frac{2}{6}\pi$ | 8.66 |
| $\frac{3}{6}\pi$ | 10 |
| $\frac{5}{6}\pi$ | 5 |
| ⋮ | ⋮ |

Toma la calculadora científica y asegúrate de que entiendes cómo obtener los valores de $y = 0$ sen $x$. Continúa calculando valores hasta llegar a los $2\pi$ rad, y luego localiza las parejas de valores en un plano cartesiano. Para ello lo mejor sería que emplearas papel milimétrico. Con paciencia y dedicación, obtendrás todas las gráficas que se piden.

## *La amplitud*

**13** Introduce ahora las siguientes funciones en el campo entrada de Geogebra:

$$y = 5 \text{ sen } x$$
$$y = \text{sen } x$$
$$y = 8 \text{ sen } x$$
$$y = 2 \text{ sen } x$$

Grafícalas una por una. Examina cada gráfica cuidadosamente.

I. ¿Cuánto valen sus amplitudes?

II. ¿Y sus periodos (en radianes)?

**14** Abre un nuevo documento de Geogebra e introduce ahora las funciones

$$y = \cos x$$
$$y = 3 \cos x$$
$$y = 7 \cos x$$
$$y = 4 \cos x$$

I. ¿Cuál es el periodo (siempre en radianes) de cada una?

II. ¿Y su amplitud?

Lo anterior puede hacerte intuir el siguiente e importantísimo resultado:

> En una función trigonométrica de las formas
>
> $$y = a \text{ sen } x,\ y = a \cos x$$
>
> donde "$a$" es una constante, el periodo en radianes es igual a $2\pi$, mientras que la amplitud viene dada por el valor de la constante "$a$".

En la ecuación $h = 10$ sen $\theta$, el valor de la constante "$a$" era 10, que efectivamente es igual a la amplitud de la función involucrada.

Pasa a la siguiente sección.

## *El periodo*

Hay dos últimas cuestiones que es importante abordar respecto a las funciones trigonométricas; ambas surgen directamente de

$$h = 10 \text{ sen } \theta$$

Dado que la rueda de la fortuna exhibe un movimiento circular uniforme, el ángulo $\theta$ aumenta continuamente de acuerdo con la ecuación

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

en donde (revisa la sección *Ecuaciones del movimiento circular uniforme*) $\omega$ es la rapidez angular del movimiento y $\theta_0$ es el ángulo inicial en el que se encontraba la canastilla al comenzar el giro. Si en la ecuación $h = 10$ sen $\theta$ sustituimos $\theta$ por esta última expresión, tendremos

$$h = 10 \text{ sen } (\omega \text{t} + \theta_0)$$

Si recuerdas, la rapidez angular de la rueda de la fortuna era de $\pi/15$ radianes/segundo (revisa tus cálculos de la sección *Señor operador, ¿qué tan rápido vamos?*). Supongamos, además, que la canastilla arrancó desde un ángulo inicial $\theta_0 = 0$. Entonces la ecuación anterior se convertirá en

$$h = 10 \text{ sen} \left(\frac{\pi}{15} t\right)$$

Obtén su gráfica en Geogebra. Recuerda emplear "*x*" y "*y*" en lugar de "*t*" y "*h*", además de escribir "sin" en lugar de "sen".

I. ¿Cuál es el periodo de tu gráfica? Obsérvala con atención y avanza sólo cuando hayas determinado ese periodo. No olvides emplear la herramienta "zoom" o girar la rueda central del ratón para poder estudiar la gráfica desde diferentes "distancias".

---

Dibuja ahora las gráficas de las ecuaciones siguientes, que difieren únicamente en que tienen diferentes valores de la rapidez angular $\omega$:

$$y = \text{sen } (x)$$

$$y = \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} x\right)$$

$$y = \text{sen}\,(2\pi\, x)$$
$$y = \text{sen}\,(3\pi\, \text{x})$$
$$y = sen\left(\frac{2\pi}{3}\, x\right)$$
$$\text{y} = \text{sen}\,(3\, x)$$

Dibuja también las gráficas de

$$\text{y} = \cos\,(x)$$
$$y = \cos\left(\frac{\pi}{2}\, x\right)$$
$$y = \cos\,(2\pi\, x)$$
$$y = \cos\,(3\pi\, x)$$
$$y = \cos\left(\frac{2\pi}{3} x\right)$$
$$y = \cos\,(3\, x)$$

II. Anota las ecuaciones en una lista, junto con sus respectivos periodos, de acuerdo con lo que puedas observar en sus gráficas mediante Geogebra.

III. ¿Cuánto vale la amplitud de cada una?

Ahora a lo realmente interesante: ¿cómo calcular el periodo de una función trigonométrica que tenga cualquiera de las formas $y = \text{sen}\ (\omega \text{t})$, $y = \cos\ (\omega \text{t})$?

La pregunta se puede responder de la siguiente manera:

En el caso de las funciones $y = \text{sen}\ (t)$, $y = \cos\ (t)$, sabemos que el periodo vale $2\pi$. Eso quiere decir que cuando la variable $t$ se mueve desde 0 hasta $2\pi$, ambas funciones cumplen un ciclo.

Ahora bien, en el caso de $y = \text{sen}\ (\omega t)$, $y = \cos\ (\omega t)$ podemos efectuar lo que se conoce como un “cambio de variable”: introducimos una nueva variable, digamos $u$, de manera que $u = \omega t$. Ello hará que ambas funciones se puedan rescribir como

$y = \text{sen}\ (u)$
$y = \cos\ (u)$

Y entonces podemos aplicar el mismo criterio que hace un momento: las funciones cumplirán un ciclo cuando $u$ avance desde 0 hasta $2\pi$. Pero recordemos que en realidad, $u$ es $\omega t$. Es decir, las funciones cumplirán un ciclo cuando $\omega t$ vaya desde 0 hasta $2\pi$. En otras palabras:

- El ciclo comenzará cuando $\omega t = 0$.
- El ciclo terminará cuando $\omega t = 2\pi$.

Al despejar la variable $t$ de las expresiones anteriores, concluiremos que

- El ciclo comenzará cuando $t = 0$.
- El ciclo terminará cuando $t = \frac{2\pi}{\omega}$.

Reflexiona un momento: esto significa que el periodo $T$ de las funciones $y = sen\ (\omega t)$, $y = \cos\ (\omega t)$ es $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

IV. Emplea esta última fórmula, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, para calcular los periodos de cada una de las funciones cuyas gráficas acabas de obtener:

$y = \text{sen}\ (x)$

$y = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

$y = \text{sen}\ (2\pi\ x)$

$y = \text{sen}\ (3\pi\ x)$

$y = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$

$y = \text{sen}\ (3\ x)$

$y = \cos\ (x)$

$y = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

$y = \cos\ (2\pi\ x)$

$y = \cos\ (3\pi\ x)$

$y = \cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$

$y = \cos\ (3\ x)$

¿Coinciden los periodos calculados con lo que puedes observar en sus gráficas?

En una función trigonométrica de las formas

$$y = \text{sen}\ (\omega t),\ y = \cos\ (\omega t)$$

el valor de la rapidez angular $\omega$ determina el periodo $T$ de la función, mediante la fórmula $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

## *La fase*

Estás a punto de convertirte en todo un(a) maestro(a) en el tema de las funciones trigonométricas. Ya sabes cómo determinar la amplitud de una función seno o coseno, y también puedes hallar su periodo si conoces su rapidez angular (y viceversa, si lo piensas un momento). Sólo te queda un último problema que enfrentar para poder decir que dominas por completo estas cuestiones.

Considera las ecuaciones

$$h = a \text{ sen } (\omega t - \theta_0)$$
$$h = a \cos (\omega t + \theta_0)$$

Ambas provienen de la fusión de las ecuaciones que se discutieron en la sección anterior.

$$h = 10 \text{ sen } \theta \quad \text{y} \quad \theta = \omega t + \theta_0$$

Ya conoces el papel que juegan "$a$" (la amplitud de la función) y "$\omega$" (con la que puedes determinar su periodo).

¿Tiene $\theta_0$ algún efecto?

¿Qué efecto será ese?

Comprender el camino hacia la respuesta puede ser más fácil si recuerdas qué significado tenía $\theta_0$ en el caso de la rueda de la fortuna: era el ángulo inicial desde el cual comenzaba su movimiento una de las canastillas.

Si una canastilla comienza su movimiento desde un ángulo inicial $\theta_0 = 0$, la gráfica que representará este movimiento tendrá un aspecto muy similar a la figura 2.21:

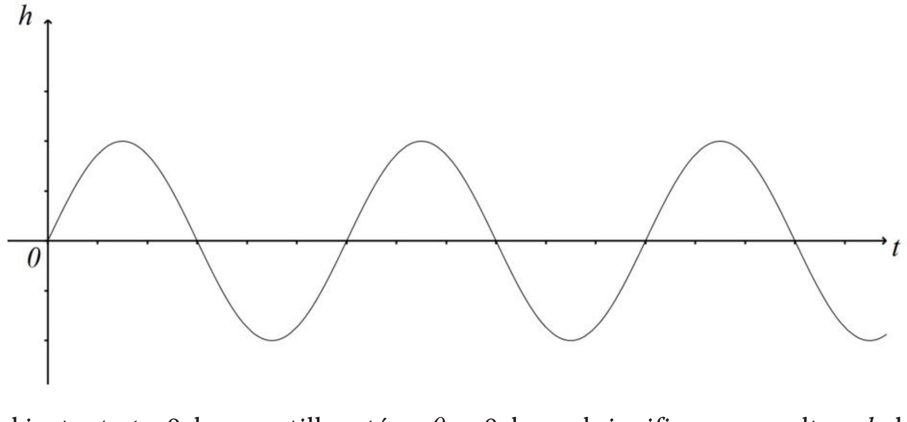
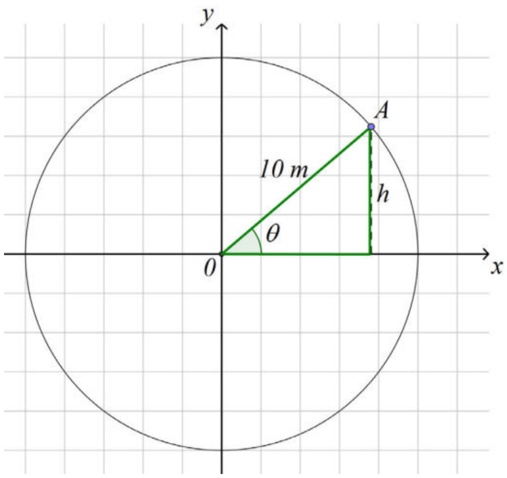



Figura 2.21 La gráfica $t$ vs. $h$ de una canastilla que arranca el movimiento desde un ángulo inicial $\theta_0 = 0$.

En el instante $t = 0$, la canastilla está en $\theta_0 = 0$, lo cual significa que su altura $h$ desde el centro de la rueda también es cero (recuerda la figura 2.9: ¿en dónde está la canastilla si el ángulo $\theta$ vale cero?). En ese instante la rueda se pone en movimiento, la variable tiempo comienza a avanzar mientras el ángulo también aumenta, y la canastilla se eleva hasta que $\theta$ alcanza los $\pi/2$ radianes, momento en el cual comienza a bajar hasta que alcanza su altura mínima cuando $\theta$ vale $3\pi/2$ radianes, etcétera…





I. ¿Qué cambiará si la canastilla no comienza el movimiento desde $\theta_0 = 0$ sino desde algún otro valor, digamos en $\theta_0 = \pi/3$? ¿Cómo se verá eso reflejado en la gráfica $t$ vs. $h$?

Reflexiónalo con detenimiento. Discútelo con tu experto de confianza.

Profundicemos un poco, mediante un análisis similar al de la sección anterior: realicemos un cambio de variable en las funciones $h = a$ sen $(\omega t + \theta_0)$, $h = a$ cos $(\omega t + \theta_0)$, introduciendo la nueva variable $u = \omega t + \theta_0$. Ello convertirá ambas funciones en

$$h = a \text{ sen } (u)$$
$$h = a \cos (u)$$

Entonces, el ciclo de cada una de ellas comenzará cuando $u = 0$ y terminará cuando $u = 2\pi$. Es decir,

- El ciclo comienza cuando $\omega t + \theta_0 = 0$.
- El ciclo termina cuando $\omega t + \theta_0 = 2\pi$.

Al despejar a $t$, obtendremos que

- El ciclo comienza cuando $t = -\dfrac{\theta_0}{\omega}$.
- El ciclo termina cuando $t = \dfrac{2\pi}{\omega} - \dfrac{\theta_0}{\omega}$.

Entonces, la presencia de $\theta_0$ provoca que el ciclo no comience en $t = 0$, sino en la posición determinada por $t = -\frac{\theta_0}{\omega}$. A este corrimiento en la posición de inicio del ciclo se le conoce como corrimiento de fase, o desfasamiento, y se le suele simbolizar por la letra griega $\varphi$ ("phi").

Por otra parte, podemos obtener el periodo (recuerda, el intervalo que $t$ debe avanzar para que se cumpla un ciclo) de estas funciones al calcular la diferencia entre $t = -\frac{\theta_0}{\omega}$ (el punto de inicio del ciclo) y $t = \frac{2\pi}{\omega} - \frac{\theta_0}{\omega}$ (el punto de término del ciclo); de esta manera, el periodo es

$$T = \left(\frac{2\pi}{\omega} - \frac{\theta_0}{\omega}\right) - \left(-\frac{\theta_0}{\omega}\right) = \frac{2\pi}{\omega} - \frac{\theta_0}{\omega} + \frac{\theta_0}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Es decir, la presencia de $\theta_0$ no altera el periodo de estas funciones, que sigue valiendo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, como en la sección anterior.

Por ejemplo, la gráfica de la función $h = 2$ sen $(\pi t - 2)$, en la que $h$ se mide en metros y $t$ en segundos, se muestra a continuación:

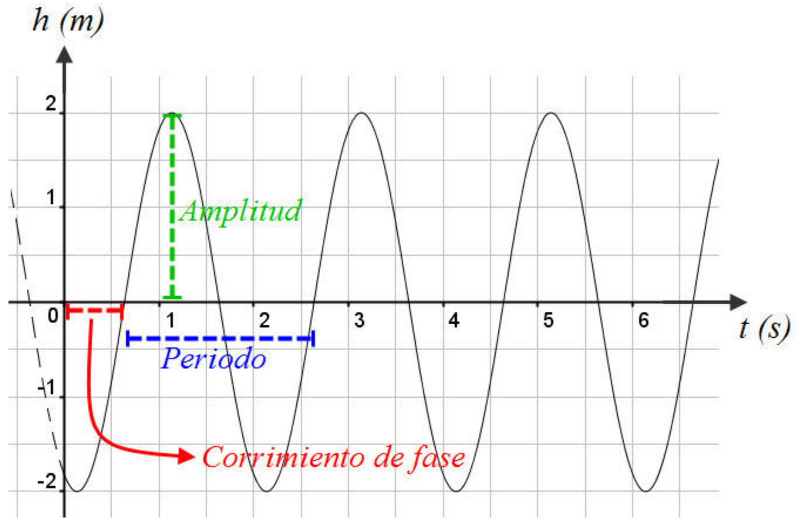



Figura 2.22

Puedes ver cómo la amplitud de la gráfica es de 2 m, tiene un periodo de $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\ s$, y presenta un corrimiento de fase de $\varphi = -\frac{(-2)}{\pi} = 0.64\ s$, que al ser positivo, es hacia la derecha.

**Para saber más**

En ciencia es frecuente emplear letras del alfabeto griego para representar cantidades físicas. Por ejemplo, en la expresión $\varphi = -\frac{\theta_0}{\omega}$ :

- $\varphi$ es la letra griega "phi" (equivalente a nuestra "f") y representa el corrimiento de fase de una función trigonométrica;
- $\theta$ es la letra griega "theta" (aproximadamente equivalente a nuestra "t"), de modo que $\theta_0$ ("theta cero") designa al ángulo inicial desde el cual comienza el movimiento representado por una función de este tipo;
- Finalmente, $\omega$ es la letra griega "omega" (similar a nuestra "o") y se usa para denotar la velocidad angular del movimiento.

En una función trigonométrica de las formas

$$y = a \text{ sen } (\omega x + \theta_0),\ y = a \cos (\omega x + \theta_0)$$

el ángulo inicial $\theta_0$ genera gráficamente lo que se conoce como un **corrimiento de fase** $\phi$, corrimiento que se puede calcular mediante la expresión $\varphi = -\frac{\theta_0}{\omega}$.

17 Investiga en diversas fuentes el significado gráfico del corrimiento de fase. En particular,

I. ¿Qué quiere decir que una gráfica *t* vs. *h* tenga un corrimiento de fase de 3 segundos?

18 Es momento de que autoevalúes lo que has logrado aprender respecto a las funciones trigonométricas. Para ello, elabora un reporte escrito en el que establezcas las características principales de las funciones trigonométricas que estudiaste en las secciones anteriores. Colócale, como es costumbre, una portada con tu nombre, el nombre del módulo y un título que tú elegirás. Asegúrate de que en tu reporte se dé respuesta a las siguientes cuestiones, proponiendo ejemplos que ilustren tus afirmaciones:

I. ¿Qué es una función trigonométrica?
II. ¿Cuál es la forma típica de la gráfica de una función trigonométrica que involucra al seno o al coseno de una de las variables?
III. Suponiendo la misma amplitud, la misma rapidez angular, el mismo ángulo inicial, ¿cuál es la diferencia entre una función seno y una función coseno?
IV. ¿Qué significa que una función trigonométrica sea periódica?
V. ¿Cómo se puede hallar el periodo de una función trigonométrica seno o coseno, a partir de la ecuación que la representa?
VI. ¿Qué es la amplitud de una función trigonométrica seno o coseno? Si se conoce su ecuación, ¿cómo determinar la amplitud?
VII. ¿Qué es el corrimiento de fase en una función trigonométrica? ¿Cómo calcularlo a partir de su ecuación?

**Más información en...**

Para más información sobre el corrimiento de fase puedes consultar las siguientes páginas electrónicas http://dgenp.unam.mx/direccgral/secacad/cmatematicas/geogebra/parafuntri.html, http://jair.lab.fi.uva.es/~manugon3/temas/ondas/MovOscilatorio/MAS/MovArmSim.htm

Un libro que puedes consultar es el de Barnett, R. (2005) *Precálculo. Funciones y Gráficas*. México: McGraw-Hill, que contiene información que seguramente te será útil.

¿? Asesoría

### Identidades trigonométricas

La definición de las funciones trigonométricas,

$$\operatorname{sen} a = c \qquad \tan a = \frac{c}{b} \qquad \sec a = \frac{1}{b}$$

$$\cos a = b \qquad \cot a = \frac{b}{c} \qquad \csc a = \frac{1}{c}$$

permite obtener lo que se conoce como identidades trigonométricas, igualdades entre funciones trigonométricas que siempre se cumplen, sin importar el valor de la variable $\alpha$. Por ejemplo, observando las definiciones de arriba, se puede notar que

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{c}{b}$$

Pero eso significa que

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

Es decir, al dividir el seno de una variable $\alpha$ entre el coseno de esa misma variable, el resultado es igual a la tangente de $\alpha$, sin importar qué valor tenga $\alpha$. Es a ese tipo de igualdades al que se le denomina identidades trigonométricas. Existen muchas de ellas; algunas son:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha = 1$$

entre muchas otras.

## La práctica hace al maestro

Estás trabajando para utilizar métodos algebraicos, gráficos y trigonométricos en la solución e interpretación de problemas prácticos de situaciones de tu entorno, relativos a diferentes tipos de movimiento.

**19** Emplea los conocimientos que construiste en las secciones *La altura de la canastilla… un análisis gráfico y algebraico*, a *Profundizando en las funciones trigonométricas*, para realizar lo que se pide a continuación:

La válvula del aire en la rueda de una motocicleta se mueve siguiendo una trayectoria circular vertical, de manera que su altura en centímetros sobre el centro de la rueda queda descrita por la ecuación $y = 6 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} t - \pi\right)$. El tiempo $t$ está midiendo en segundos.

I. ¿Cuál es el periodo de su movimiento?

II. ¿Cuánto mide el diámetro de la rueda?

III. Su movimiento ¿presenta algún corrimiento de fase? ¿Cuánto vale?

**Ejemplo**

Considera lo que sucedería si la ecuación del movimiento fuera $y = 3\cos(4t + 2)$. De acuerdo con las técnicas que se exploraron en las secciones anteriores, su periodo se puede calcular mediante la fórmula $T = \frac{2\pi}{\omega}$, que en este caso da $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. En otras palabras, ese movimiento completará un ciclo cada $\frac{\pi}{2}$ (aproximadamente 1.57) segundos.

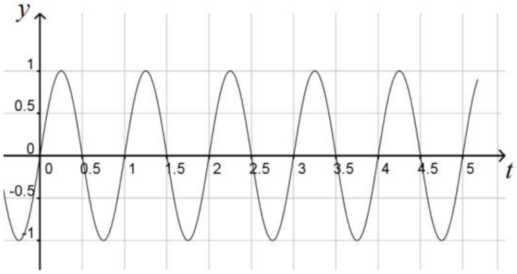
Inspeccionando la ecuación, se observa que la amplitud del movimiento es de 3 metros (suponiendo que las medidas se están manejando en esas unidades), así que el diámetro de la trayectoria circular a lo largo de la cual se mueve la válvula sería de 6 metros.

Finalmente, la presencia del término "+ 2" en el argumento de la función indica que en este caso sí hay un corrimiento de fase, el cual podemos calcular mediante la fórmula $\varphi = -\frac{\theta_0}{\omega}$. En este caso, la fórmula dará $\varphi = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.

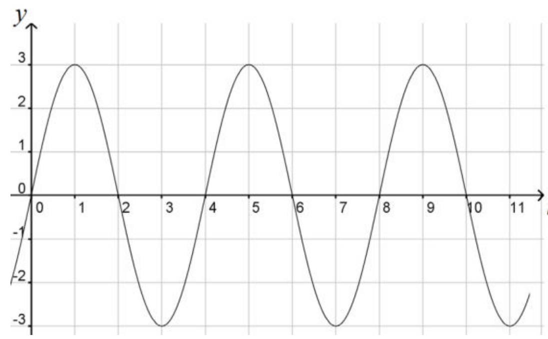
IV. Escribe la ecuación que correspondería al movimiento de la válvula si su periodo fuera de 9 segundos, la rueda tuviera un radio de 35 centímetros y hubiera un corrimiento de fase de 2 segundos.

V. Obtén la ecuación que corresponde a cada una de las siguientes gráficas; anota cada ecuación junto a la gráfica que le corresponda (sugerencia: trabaja bajo el supuesto de que cada ecuación tiene una de las formas $y = a$ sen $(\omega t + \theta_0)$, $y = a\cos(\omega t + \theta_0)$; luego, observando atentamente las gráficas, determina sus amplitudes, periodos y corrimientos de fase, y emplea esa información para determinar la velocidad angular $\omega$ mediante la fórmula $T = \frac{2\pi}{\omega}$, y el ángulo inicial $\theta_0$ mediante la fórmula $\varphi = -\frac{\theta_0}{\omega}$).

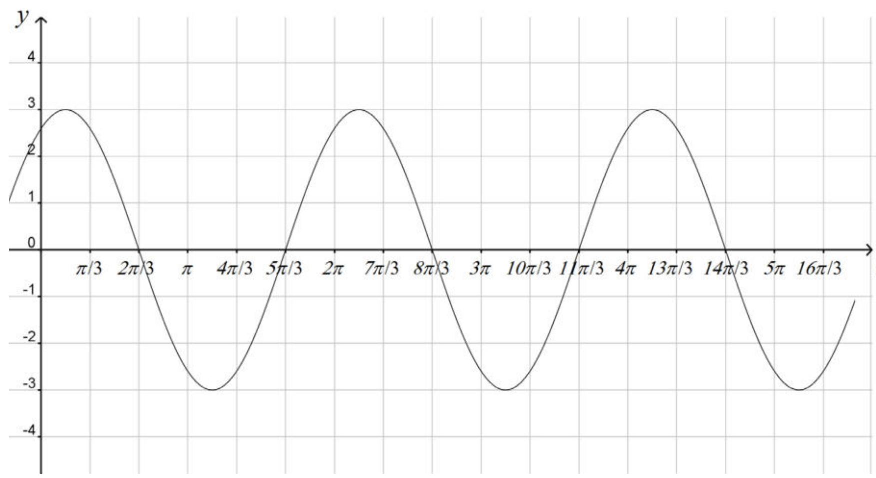
a)



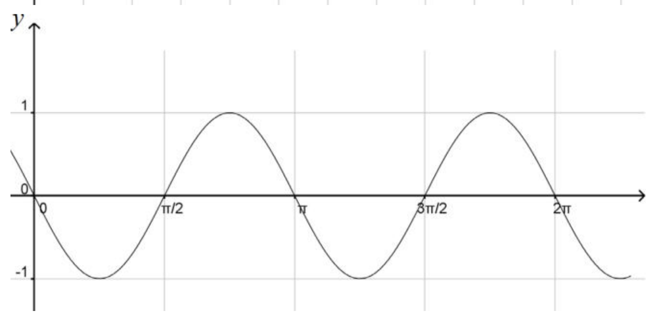
b) ______________________


y
t
3
2
1
0
-1
-2
-3
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

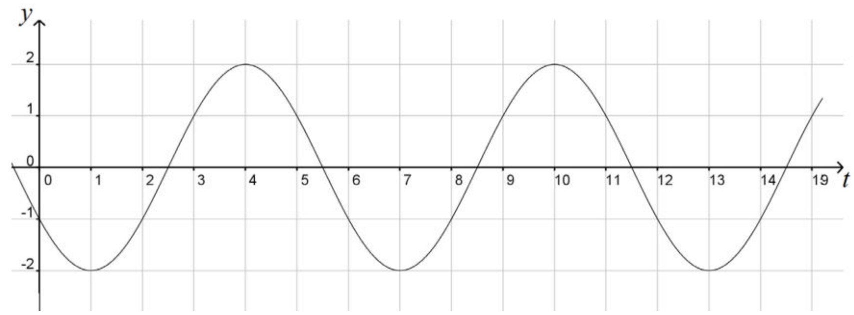
c) ______________________


y
t
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
π/3 2π/3 π 4π/3 5π/3 2π 7π/3 8π/3 3π 10π/3 11π/3 4π 13π/3 14π/3 5π 16π/3

d) ______________________


y
1
0
-1
0 π/2 π 3π/2 2π

e) ______________________


y
t
2
1
0
-1
-2
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 19

VI. El ventilador del techo de una habitación en Mérida, Yucatán, da vueltas de acuerdo con la ecuación $y = \cos(4t + 3)$. ¿Cuál es la amplitud de su movimiento? ¿Su periodo? ¿Su corrimiento de fase?

No pases a la siguiente sección si no has concluido la solución de las cuestiones anteriores. Comparte tus razonamientos, dificultades y propuestas de solución con tu experto de confianza.

Escribe una ecuación que, en forma análoga a lo trabajado en esta sección, describa la "altura" $h$ del satélite perdido planteado al inicio de la unidad, medida desde el centro de la Tierra, como función del tiempo medido en horas. Mira la figura 2.23.

Esta ecuación será importante para la solución del problema, por ello conviene que la conserves en tu portafolio del estudiante.

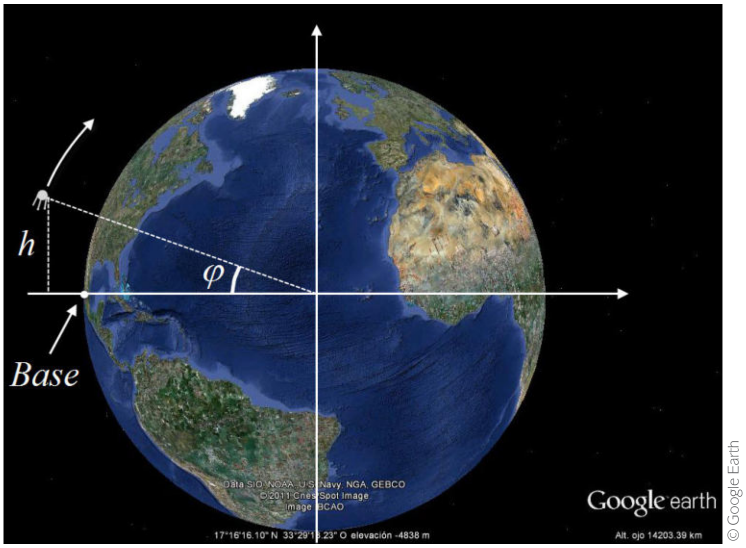



Figura 2.23

## En otra parte de la feria…

En toda feria que se precie de serlo hay, además de la rueda de la fortuna, por lo menos un carrusel con varias filas de caballos. La figura 2.24 es una fotografía del carrusel que se pone en la ciudad de Morelia.

Los hermanos Ana y Balam, de cinco y siete años respectivamente, se subieron a este carrusel; pero como acababan de discutir, Ana tomó un caballo en la fila más interna del carrusel mientras que Balam decidió montar uno de los caballos de la fila más externa. Sus posiciones se representan en la figura 2.25.

Figura 2.24

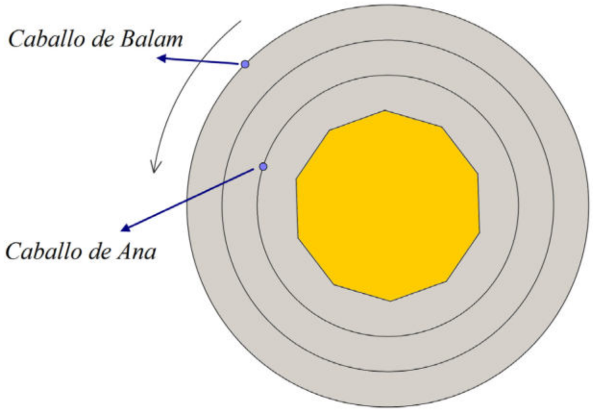



Figura 2.25 Un modelo de la vista superior del carrusel, que tiene tres filas de caballos. Balam tomó un caballo en la fila más externa mientras su hermana Ana eligió uno en la fila más interna.

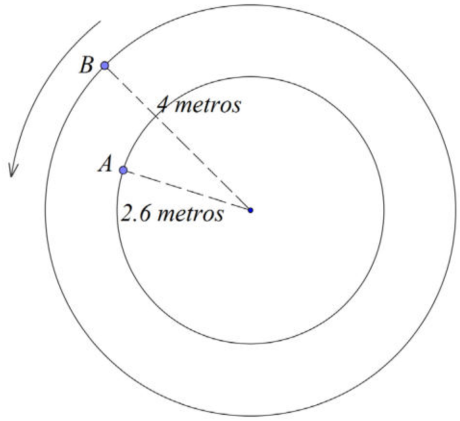



Figura 2.26 Un modelo abstracto del carrusel, con Ana en la posición A y Balam en la posición B. Se indican también sus distancias al centro del carrusel.


Cuando este carrusel se pone en movimiento, lo hace dando cuatro vueltas por minuto. La pregunta ahora es, ¿alguno de los dos hermanos se mueve más rápido que el otro?

En la sección *Señor operador, ¿qué tan rápido vamos?*, estudiaste que en un movimiento circular hay dos clases de rapidez: la rapidez angular y la rapidez lineal. También aprendiste a calcular cada una.

Emplea lo aprendido en secciones anteriores para responder lo siguiente:

I. Calcula las rapideces lineal y angular de Balam y de Ana.

II. ¿En qué sentido se puede decir que uno de los dos hermanos se mueve más rápidamente que el otro?

Si lo reflexionas un momento, notarás que existe una manera de obtener la rapidez lineal a partir de la rapidez angular de un objeto en rotación. Veamos:

Recordemos que la rapidez angular $\omega$ representa el ángulo recorrido por un objeto en su trayectoria circular, por unidad de tiempo. Es decir, $\omega = \frac{\theta}{t}$.

Ahora bien, si $T$ es el periodo del movimiento en cuestión, entonces la expresión anterior implica que

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

pues en un tiempo $T$ el objeto da una vuelta completa.

Por otro lado, la rapidez lineal es la distancia recorrida por el objeto, a lo largo de su trayectoria circular, por unidad de tiempo.

El objeto recorre la circunferencia completa (de longitud $2\pi r$) en un tiempo $T$, de modo que podemos expresar a la rapidez lineal como

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Al comparar ambas expresiones, se vuelve evidente que rapidez angular y rapidez lineal están relacionadas de la siguiente manera:

$$v = \omega r$$

Donde $r$ es el radio de la circunferencia a lo largo de la cual tiene lugar el movimiento.

En un movimiento circular que ocurre a lo largo de una trayectoria de radio $r$, la rapidez lineal y la rapidez angular están relacionadas mediante la fórmula

$$v = \omega r$$

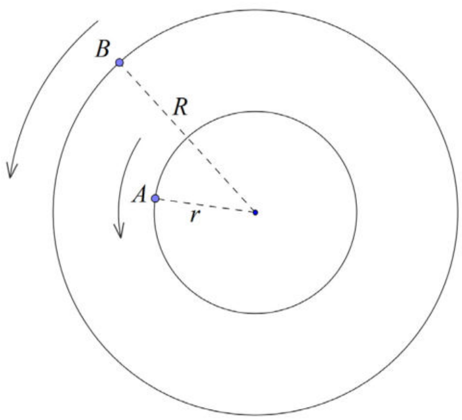



Figura 2.27 Dos puntos se mueven a lo largo de trayectorias circulares de radios *r* y *R*, con rapideces angulares idénticas.

22 Vayamos ahora un poco más lejos. Observa la figura 2.27:

I. ¿Cuál de los dos puntos, A o B, recorre una longitud de arco mayor al dar una vuelta completa a su trayectoria?

II. Las rapideces angulares son las mismas. ¿Qué sucede con sus rapideces lineales?

III. Una hormiga está parada en el extremo de una de las hélices de un helicóptero que está a punto de ponerse en funcionamiento. ¿Qué debería hacer para incrementar sus posibilidades de mantenerse sobre la hélice y no salir disparada por la velocidad del giro?

IV. ¿Por qué es tan fácil perder en el juego de las "coleadas", en el que los participantes forman una fila, se toman de las manos, y comienzan a girar en torno a uno de ellos, que se encuentra en uno de los extremos de la fila y se esfuerza por hacer que los demás giren a su alrededor con tanta fuerza como le sea posible? ¿Quiénes tienen más posibilidades de perder primero? ¿Por qué? (un participante pierde si abandona la fila al soltar la mano de uno de sus compañeros).

V. Sólo considerando los movimientos de rotación de la Tierra y la Luna, ¿quién se desplaza más rápido, una persona sentada en su casa en la Ciudad de México o un astronauta que inspecciona una muestra de roca en la luna?

VI Discute con otros estudiantes de bachillerato cuál es la mejor manera de construir una bicicleta que alcance la mayor rapidez posible para un ritmo de pedaleo constante. ¿Cómo deben elegirse la estrella central y la trasera?

Sigue avanzando, lo estás haciendo muy bien.

**UN MOMENTO DE REFLEXIÓN**

En la situación planteada al inicio de la unidad, la rapidez lineal del satélite depende del radio de su órbita alrededor de la Tierra. De acuerdo con lo que acabas de estudiar, a mayor radio de la órbita, ¿corresponde mayor o menor rapidez lineal? Escribe tus reflexiones al respecto. Si es parte importante de tu aprendizaje valora su inclusión en tu portafolio del estudiante.

## Recapitulación

### Gestión del aprendizaje

Algunas de las cantidades que manejarás en esta sección son o muy pequeñas, o muy grandes. Para expresarlas con mayor comodidad, te sugerimos usar lo que se conoce como "notación científica". Funciona de la siguiente manera:

Imagina que una cantidad resulta tener el valor 0.000000056. Para evitar escribir todos esos ceros (son siete después del punto, cuéntalos), la misma cantidad se expresa, en notación científica, como

$$5.6 \times 10^{-8}$$

El factor $10^{-8}$ significa que para saber el valor real de esa cantidad, el punto decimal debe recorrerse ocho lugares a la izquierda. Haz la prueba, recorre el punto decimal ocho lugares a la izquierda, y verifica cómo llegas a la cantidad original, 0.00000056.

(*Continúa...*)

Estás trabajando para resolver situaciones problemáticas de tu entorno o de un fenómeno natural que involucre el cálculo del periodo y la frecuencia de un objeto, cuyo movimiento corresponda a la trayectoria del movimiento circular.

(*Continuación...*)

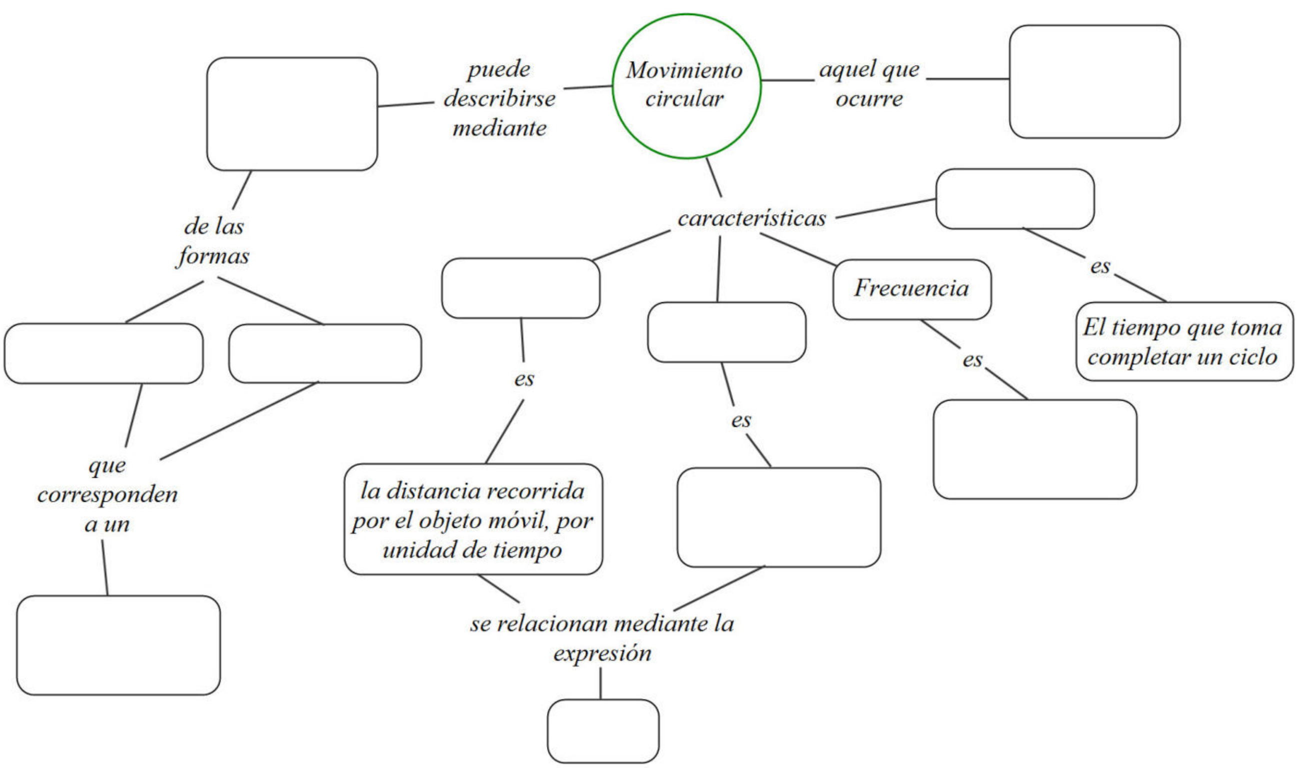
Del mismo modo, la notación científica permite expresar cantidades muy grandes; así, 1970000000 se puede rescribir como

$$1.97 \times 10^9$$

Al leer esa expresión, sabemos que para saber su valor real debemos recorrer el punto decimal 9 lugares a la derecha, indicados por el factor $10^9$.

Entonces, en notación científica el factor $10^n$ significa que debes recorrer el punto decimal $n$ lugares a la derecha, mientras que $10^{-n}$ significa que debes recorrerlo $n$ lugares a la izquierda. Toma nota de esto, te será muy útil.

**23** Haz estudiado varios elementos muy importantes sobre el movimiento circular uniforme. Emplea estos conocimientos para completar el siguiente mapa conceptual, utilizando las frases, conceptos y ecuaciones que aparecen en su parte inferior.




*Número de ciclos completos por unidad de tiempo*

$y=a\,\text{sen}(\omega t + \theta_0)$

*Rapidez lineal*

*Funciones trigonométricas*

*Amplitud*

$v = \omega r$

*el ángulo cubierto por el objeto móvil, por unidad de tiempo*

*Periodo*

*en una trayectoria circular*

$y=a\cos(\omega t + \theta_0)$

*Movimiento armónico simple*

*Rapidez angular*

Realiza lo que se pide a continuación. Pon por escrito todos tus procedimientos y razonamientos, y compártelos con otros estudiantes de bachillerato y tu experto de confianza.

Investiga cuál es la distancia promedio de la Tierra a la Luna, y de la Tierra al Sol. Empléalos para determinar el periodo en segundos, la frecuencia en Hertz (recuerda, un Hertz equivale a un ciclo por segundo, así que la frecuencia expresada en Hertz será el número de ciclos completados en un segundo), la velocidad angular (en radianes por segundo) y la velocidad lineal (en metros por segundo) de:

I. La Luna en su movimiento de traslación alrededor de la Tierra (aunque no se trata en realidad de un movimiento perfectamente circular, para nuestros fines podemos aproximarlo como tal).

II. La Tierra en su movimiento de traslación alrededor del Sol (tampoco es exactamente circular, pero se aproxima lo suficiente como para poder considerarlo así por el momento).

III. La hélice de un generador eoloeléctrico en el Istmo de Tehuantepec gira de modo que su movimiento está descrito por la ecuación $y = \cos(\pi t - 2\pi)$, en la que "$y$" representa la altura (en metros) de una de las puntas de la hélice, medida respecto a su centro, y "$t$" es el tiempo (en segundos) transcurrido desde que comenzó a registrarse el movimiento.

¿Cuánto mide la hélice de punta a punta?

IV. ¿A cuántas revoluciones por minuto (rpm) está girando? (es decir, ¿cuántas vueltas da en un minuto?)

V. ¿Cuánto tiempo le lleva dar una vuelta?

VI. ¿A qué altura se hallaba la punta de la hélice en el momento en que se comenzó a registrar el movimiento?

Dibuja la gráfica de la ecuación que describe el movimiento de esta hélice, ya sea empleando lápiz y papel, o un software de hoja de cálculo, como Calc o uno para gráficos interactivos, como Geogebra. Si tienes dudas sobre cómo utilizar un software de hojas de cálculo consulta tu libro del módulo *Tecnología de Información y Comunicación*.

También puedes acudir a la biblioteca más cercana a tu localidad y consultar un libro de Computación o Informática. Si cuentas con una computadora con acceso a Internet visita algunos tutoriales y/o páginas que te brinden información al respecto.

**Avanza a la siguiente sección cuando tengas respuesta para cada una de las preguntas planteadas. ¡Estás haciendo un excelente trabajo!**

**Más información en...**

Para más información sobre cómo utilizar un software de hojas de cálculo accede a las siguientes páginas electrónicas

- http://profesores.ie.edu/enrique_dans/download/pcworld1.pdf
- http://enlinea.zaragoza.unam.mx/didacta/computo/Curso-FESZ/hojacal1.pdf
- http://www.aulafacil.com/excel-2007/curso/Temario.htm
- http://www.aulaclic.es/excel2007/t_11_1.htm
- http://office.microsoft.com/es-hn/excel-help/demostracion-crear-graficos-en-excel-2007-HA010200499.aspx

Los libros que se te recomienda consultar son:

- Pacheco, M. L. (2011). *Competencias tecnológicas. Informática y computación* III. México: Edere/Esfinge.
- Pérez, C. (2010). *Informática para preparatoria*. México: ST editorial.

Estás trabajando para resolver situaciones problemáticas que involucran el cálculo de la velocidad en un movimiento circular uniforme o uniforme acelerado.

## Movimiento circular acelerado

En realidad, cualquier movimiento circular involucra una aceleración. ¿Por qué? (recuerda lo que significa la palabra aceleración; sección *El cambio del cambio*).

Entonces, ¿a qué nos referimos cuando específicamente decimos “movimiento circular acelerado”? Esta sección puede ayudarte a aclararlo.

Norma sube a su bicicleta y arranca desde el reposo hasta alcanzar una velocidad (que después mantiene constante) de 20 m/s en 5 s. Observa la figura 2.28.

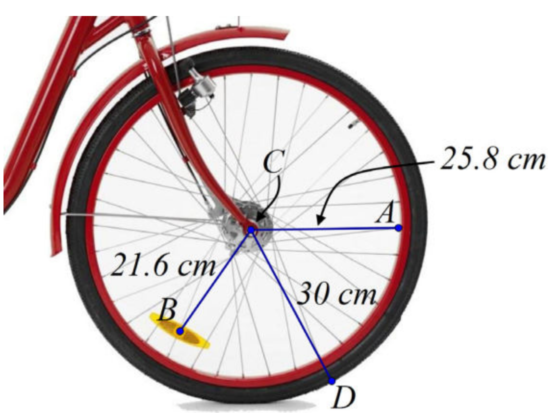



Figura 2.28 La rueda delantera de la bicicleta de Norma, con algunos señalamientos que emplearás en un momento.

Si Norma comenzó en el reposo (es decir, con una rapidez cero), entonces la rapidez lineal inicial de los puntos A, B y D de la figura 2.28 era cero. Lo mismo podemos decir respecto a sus rapideces angulares.

Pero al instante siguiente Norma comienza a pedalear, lo cual la lleva desde el reposo (rapidez cero) hasta una rapidez de 20 m/s. Le toma 5 s lograrlo.

Esto significa que tanto la rapidez lineal como la rapidez angular de cada uno de los puntos A, B y D experimentó un incremento en un tiempo determinado. Es decir, hubo una aceleración (y no estamos hablando de la aceleración que se presenta en todo movimiento circular). Es esta clase de movimiento la que se conoce como movimiento circular acelerado.

**24** Emplea lo que sabes sobre el concepto de aceleración (vuelve a la sección *El cambio del cambio*, si lo consideras necesario) y la información que proporciona la figura 2.28 para realizar lo que se pide a continuación:

I. Determina la aceleración angular (el cambio en la rapidez angular por unidad de tiempo) para cada uno de los tres puntos A, B y D.

II. Calcula la aceleración lineal (el cambio en la rapidez lineal por unidad de tiempo) para los mismos puntos.

Es posible obtener una relación entre la aceleración lineal y la angular de un modo parecido a lo que ocurre con las rapideces lineal y angular. Veamos:

La aceleración lineal $a$ es el cambio en la velocidad lineal dividido entre el tiempo en que ocurre dicho cambio. Es decir, si un movimiento circular se lleva a cabo inicialmente con una velocidad lineal $v_i$ y luego cambia a una velocidad final $v_f$ durante un tiempo $t$, entonces la aceleración lineal quedará expresada por

$$a = \frac{v_f - v_i}{t}$$

De un modo análogo, la aceleración angular $a_\theta$ se puede escribir como

$$a_\theta = \frac{\omega_f - \omega_i}{t}$$

Pero como las velocidades lineal y angular se relacionan por la fórmula

$$v = \omega r$$

La expresión para la aceleración lineal se puede reescribir como

$$a = \frac{\omega_f r - \omega_i r}{t}$$

(*Continúa...*)

(*Continuación...*)

Al factorizar el radio $r$, se tiene

$$a=\left(\frac{\omega_f-\omega_i}{t}\right)r$$

Comparando esto con la fórmula para la aceleración angular $a_\theta$, se concluye que

$$a = a_\theta r$$

En un movimiento circular que ocurre a lo largo de una trayectoria de radio r, la aceleración lineal y la aceleración angular están relacionadas mediante la fórmula

$$a = a_\theta r$$

## Ejemplo

Supongamos que Norma fuera desde el reposo hasta los 15 m/s de rapidez lineal en 6 segundos. Concentrémonos en el punto D.

La rapidez lineal de este punto D también comenzó siendo cero, y terminó siendo de los mismos 15 m/s. Entonces su aceleración lineal es simplemente de $\frac{15-0}{6}=2.5\ m/s^2$.

Por otra parte, su rapidez angular comenzó valiendo cero, mientras que al final fue de $\frac{15}{0.3}=50\ rad/s^2$ (recuerda la relación entre rapidez angular y rapidez lineal que encontraste en la sección *En otra parte de la feria*…). De esta manera, su aceleración angular es $\frac{50-0}{6}=8.33\ rad/s^2$.

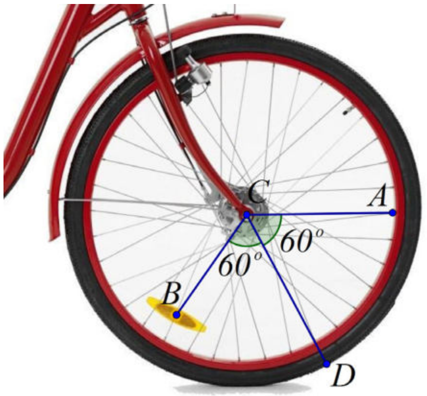



Figura 2.29 La rueda de la bicicleta de Norma. Considera que la fotografía representa las posiciones iniciales de los puntos A, B y D en el momento en que el movimiento pasa a ser circular uniforme, y toma la posición de A como la "posición cero".

III. Una vez que Norma alcanza los 20 m/s, el movimiento se convierte en circular uniforme. Encuentra una ecuación que describa la altura de los puntos A, B y D sobre el punto C, en esta fase del movimiento de la bicicleta. Si lo consideras necesario, refiérete a lo que estudiaste desde la sección *La altura de la canastilla… un análisis gráfico y algebraico*, hasta la sección *La práctica hace al maestro*, y emplea la información extra que proporciona la figura 2.29.

(Sugerencia: recuerda que el movimiento de un punto que sigue una trayectoria circular se puede describir mediante una función de la forma

$y = a \text{ sen } (\omega t + \theta 0)$, en la que a representa la amplitud del movimiento, mientras que $\omega$ es su velocidad angular y $\theta 0$ es el ángulo inicial desde el cual dicho punto inicia su movimiento).

## El péndulo

Estás trabajando para representar e interpretar el movimiento armónico con respecto al tiempo, y a una fuerza aplicada.

Los **péndulos** se encuentran entre los artefactos más sencillos y a la vez más importantes en la historia de la civilización. Básicamente, cualquier peso que cuelgue de algún soporte fijo de manera que pueda oscilar libremente entre dos posiciones, es un péndulo.

En la antigüedad, la única manera en que la gente podía medir el tiempo era mediante la observación de los cuerpos celestes y sus ciclos; de esta manera era posible contar el paso de los días, los meses y los años; construyendo relojes de sol incluso se podían medir las horas que duraba un día y, con un buen diseño, llegar incluso a una precisión de minutos.

Pero medir intervalos de tiempo más cortos, como el que tarda en caer un objeto de la mano al suelo, era una tarea muy difícil. Por ello resultaba casi imposible que los pensadores de la antigüedad tuvieran una idea correcta del modo en que funcionan muchas leyes de la naturaleza; por ejemplo, el sabio griego Aristóteles pensaba que una piedra caía al suelo con más rapidez que una pluma porque la piedra "buscaba" volver a su "sitio de pertenencia", el suelo, mientras que la pluma "buscaba" mantenerse en su "sitio de pertenencia", el aire.

Los péndulos constituyeron la primera forma de medir el tiempo con un grado de precisión suficiente como para permitir un mejor estudio de este y muchos otros fenómenos naturales; gracias a cierta propiedad característica de todos los péndulos –que entre otras cosas descubrirás por tu cuenta en esta sección-, se les empleó en la construcción de los primeros relojes, con los cuales fue posible realizar mediciones de tiempo más y más precisas; así comenzó el camino que lleva a nuestros modernos relojes atómicos, que pueden medir intervalos de tiempo cortos: de hasta la milmillonésima parte de un segundo.

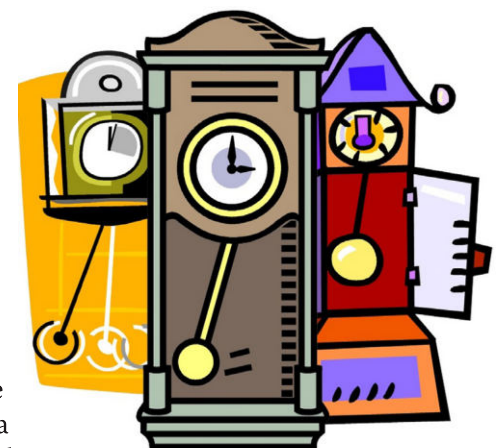


Figura 2.30 Varios péndulos

25 Lee con atención las instrucciones siguientes y lleva a cabo todo lo que se pide:

El hecho de que se pueda construir un reloj con base en un péndulo significa que existe alguna manera de controlar el periodo del péndulo: el tiempo que tarda en cumplir una oscilación completa, ida y vuelta. Tu objetivo en esta

**Más información en...**

Para más información sobre cómo elaborar un péndulo puedes consultar los siguientes sitios en Internet:

http://usuarios.multimania.es/pefeco/pendulo.htm

http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/trabajo/pendulo/pendulo.htm

http://www.portalplanetasedna.com.ar/pendulo.htm

www.rena.edu.ve/cuartaEtapa/fisica/Tema5c.html

Y también las siguientes referencias bibliográficas:

Resnick, R. et al (1993). *Física*. Vol. 1. México. Compañía Editorial Continental. 362-363.

Hewitt, P. (2004). *Física conceptual*. *9ª edición*. México. Pearson Educación.

Consultar las fuentes indicadas te permitirá definir de qué factores depende el periodo de un péndulo, y a partir de esa información podrás cumplir tu tarea: construir uno cuyo periodo valga un segundo.

tarea es construir un péndulo cuyo periodo mida, con tanta exactitud como te sea posible, un segundo. Recuerda que puedes apoyarte en Internet para indagar información al respecto, aunque también es conveniente que recurras a algún libro de texto de Física.

El diseño de tu péndulo es libre, sólo procura emplear materiales tan baratos y fáciles de conseguir como te sea posible (hilo, madera, plástico…).

Una vez que el péndulo esté completo, emplea un cronómetro para comprobar que, efectivamente, su periodo es de un segundo.

I. ¿Cuál es su frecuencia?

Toma una fotografía de tu péndulo e inclúyela en un breve reporte en el que describas los pasos que seguiste para llevar a cabo esta tarea, desde la investigación que te llevó a definir qué elementos influyen en su periodo, hasta los últimos detalles de la construcción. Colócale, como es usual, una portada con un título, tu nombre y el de este módulo.

Estás trabajando para expresar matemáticamente el movimiento de un objeto que corresponde al armónico simple.

## ¿Movimiento armónico simple en el péndulo?

En la investigación que llevaste a cabo en la sección anterior debiste encontrar que la amplitud de las oscilaciones del péndulo debe ser pequeña para que se cumpla la fórmula que permite calcular su periodo. De un modo similar, si las oscilaciones son pequeñas, el péndulo presentará un movimiento armónico simple.

Consigue una lámpara de mano. Coloca tu péndulo frente a una pantalla blanca, como una pared, una cartulina o una hoja de papel blanca. Apaga la luz, haz oscilar tu péndulo —con una amplitud pequeña en comparación con su longitud— e ilumínalo con la lámpara de modo que su sombra se proyecte en la pantalla blanca. Mira la figura 2.31.

¿Cómo es el movimiento que sigue la sombra del péndulo?

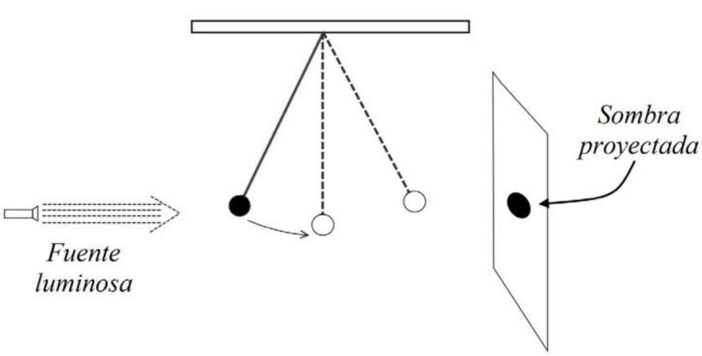



Figura 2.31 Un péndulo y una fuente luminosa que lo ilumina desde la izquierda. A la derecha del péndulo, se proyecta su sombra sobre una pantalla.

26 Vamos a analizar ese movimiento con algo más de detalle. Para ello, observa la figura 2.32.

El movimiento arriba-abajo de la sombra estará determinado por la oscilación del péndulo entre su punto más alto y su punto más bajo.

Reflexiona un momento. Este movimiento es periódico, de manera que se puede describir mediante una función trigonométrica como las representadas por las ecuaciones

$$h = a \text{ sen } (\omega t + \theta_0)$$

$$h = a \cos (\omega t + \theta_0)$$

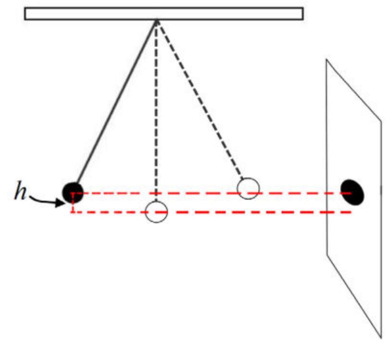


Figura 2.32

I. ¿Cuál será el periodo de este movimiento?

II. Con ayuda de una regla o una cinta métrica, mide la amplitud de su movimiento. ¿Cuánto vale?

III. Elige como "instante cero" el momento en que sueltas el péndulo y éste comienza a oscilar. Con ayuda de tu regla o cinta métrica, determina la posición inicial de su sombra (su valor dependerá de las dimensiones particulares de tu péndulo, así como de la posición que asignes al origen de tu sistema de referencia). Usa este dato para determinar el corrimiento de fase del movimiento, empleando una función de la forma $h = a \text{ sen } (\omega t + \theta_0)$ para describirlo. Escribe dicha función.

Dibuja tu gráfica empleando para ello lápiz y papel, o una hoja de cálculo electrónica, o un software especializado como Geogebra.

Comenta tu ecuación y tu gráfica con tu experto de confianza.

Tu ecuación, así como tu gráfica, modelan el movimiento del péndulo haciendo algunas suposiciones que en la vida real pueden no cumplirse: es decir, en la vida real hay factores que harán que el movimiento no se comporte exactamente así. ¿Qué factores son esos?

Pasa a la siguiente sección, que es la última de esta unidad. ¡Bien hecho!

CIERRE

## Al rescate del satélite perdido

Vuelve ahora a la situación que se planteó en la sección *El satélite perdido*. Ese satélite se mueve a lo largo de una órbita circular, que pasa justo sobre la base terrestre desde la que se le va a enviar una señal de radio, necesaria para arreglar un desperfecto que impide que el artefacto se comunique con la Tierra.

La órbita del satélite lo ubica a una altura constante de 10000 km sobre la superficie del planeta, y se mueve con una rapidez lineal de 18000 km/h. Aunque la Tierra no es completamente esférica, supón que lo es y emplea para su radio un valor de 6370 km. Considera además que los ingenieros de la empresa perdieron contacto con el aparato 12 minutos después de que había pasado sobre su base terrestre.

Recupera los avances que has realizado sobre este problema y que has estado anexando a tu portafolio del estudiante. Los 12 minutos que habían transcurrido entre el momento en que el satélite paso sobre la base en tierra y el momento en que se perdió contacto introducirán una pequeña modificación en estos avances. ¿En qué consiste? Reflexiónalo con calma y luego responde,

I. A partir del momento en que se perdió contacto, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que el satélite vuelva a pasar sobre la base terrestre?

---

La señal no llegará de forma inmediata hasta el satélite; hay que tomar en cuenta que las señales de radio viajan a la velocidad de la luz, de aproximadamente 300 000 km/h.

II. Tomando en cuenta que la señal se enviará en dirección vertical hacia arriba, ¿la transmisión deberá realizarse antes o después de que el satélite pase sobre la base terrestre?

---

III. ¿Cuánto tiempo antes –o después?

---

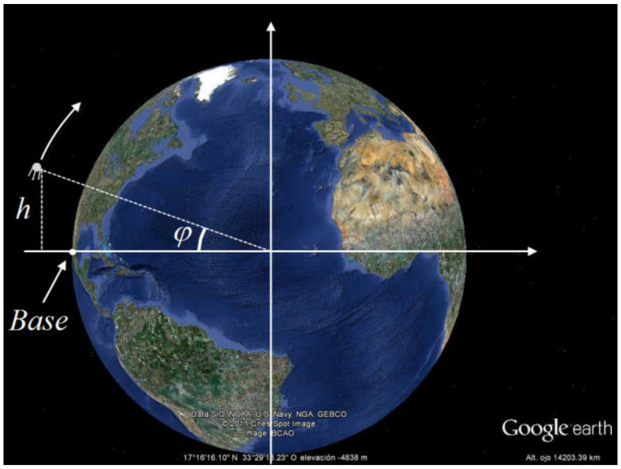



Figura 2.23

Retoma la ecuación que habías escrito para la "altura" $h$ del satélite sobre el centro de la Tierra. Luego,

IV. Calcula el periodo del movimiento del satélite, el valor de su ángulo inicial $\theta_0$ (tomando como instante "inicial" el momento en se perdió contacto con él) y escribe una ecuación que describa la posición $h$ del satélite (figura 2.23; la figura no está a escala) como función del tiempo (medido en minutos).

---

Usa la tabla siguiente para verificar que hayas cumplido con todos los elementos necesarios para llegar a la solución del problema.

| Elementos de la solución | Sí | No |
|---|---|---|
| Expresaste todas las cantidades en el mismo sistema de unidades (es decir, las expresaste todas usando metros-segundos, o todas usando kilómetros-horas). | | |
| Calculaste la longitud de la órbita del satélite alrededor de nuestro planeta. | | |
| Calculaste el tiempo que tarda el satélite en dar una vuelta completa a nuestro planeta. | | |
| Determinaste el tiempo que el satélite tardará en pasar de nuevo sobre la base terrestre, a partir del momento en que se perdió contacto con él. | | |
| Hallaste el tiempo que tarda la señal de radio en llegar desde la base en tierra hasta el satélite en órbita. | | |
| Determinaste si la señal debe enviarse unos momentos antes o después de lo calculado inicialmente, debido a que no llega de forma inmediata hasta el satélite. | | |
| Hallaste el periodo del satélite. | | |
| Hallaste el ángulo inicial $\theta_0$ del satélite. | | |
| Escribiste la ecuación para la posición *h* del satélite como función del tiempo. | | |

Como una forma de autoevaluar los conocimientos que has desarrollado al estudiar esta unidad, te proponemos dos actividades:

- Escribe en una o dos cuartillas, un texto titulado "Las cosas que conozco sobre el movimiento armónico simple", en el cual (como el título indica) enumerarás todos los hechos que conoces ahora respecto a este tipo de movimiento. Incluye fenómenos que observes en la vida real en los cuales estos conocimientos tengan aplicación.
- Reflexiona detenidamente sobre los conceptos que acabas de estudiar, y plantea una situación problemática que observes a tu alrededor, y en la que intervengan estos conceptos (podría ser algo como ¿qué tan rápido giran las nubes en un huracán? o ¿cuál será la función que describe la posición de una prenda de ropa que da vueltas en una centrifugadora?). Procura usar tus conocimientos para dar una respuesta que te deje satisfecho(a).

UNIDAD 3

# Dinámica del movimiento

## ¿Qué voy a aprender y cómo?

¿Dinámica? Sí, dinámica. En las dos unidades anteriores, has estudiando algunas clases importantes de movimiento. Has analizado varias de sus características (rapidez, velocidad, aceleración…) las has descrito mediante ecuaciones, tablas y gráficas, incluso has realizado predicciones sobre la posición que un objeto ocuparía después de determinado tiempo, o sobre el tiempo que le tomaría recorrer una distancia determinada, todo en circunstancias por demás variadas.

Ha sido un trabajo duro pero lo has hecho de maravilla (como lo evidencia el hecho de que estés leyendo esto).

Sin embargo, algo de lo que no has abordado hasta ahora son las causas del movimiento: ¿qué es lo que hace que un objeto se mueva? ¿Bajo qué condiciones ocurrirá un movimiento, y en qué forma ocurrirá? ¿Es posible que algo se mueva para siempre?

La Dinámica es una rama de la Física que aborda y da respuesta a ese tipo de preguntas: es el estudio del movimiento, ocupándose de sus causas (cuando se estudia el movimiento sin preocuparse por sus causas, se está hablando de cinemática). Gracias a esta disciplina fue posible comprender la forma en que un objeto más pesado que el aire podía volar, el modo en que debían diseñarse los cohetes con los que el ser humano llegó a la Luna y los automóviles que transportan a millones de personas todos los días, entre muchos otros avances que han dado forma a nuestra civilización.

## ¿Con qué propósito?

En esta última unidad, abordarás los conceptos más importantes de la dinámica. Este estudio, unido a lo que has trabajado en las dos unidades anteriores, te ayudará a desarrollar una mejor comprensión del movimiento en sus múltiples facetas. El propósito de la unidad es que analices y resuelvas problemas prácticos relacionados con las leyes de Newton, el trabajo, la potencia y la energía mecánica, empleando dichas ideas físicas así como modelos matemáticos aplicados de manera científica en múltiples fenómenos físicos observables en tu vida cotidiana.

## ¿Qué saberes trabajaré?

El estudio de la dinámica del movimiento te llevará a encontrarte con diferentes conceptos importantes, algunos ya conocidos y otros que quizá resultarán novedosos: unos provenientes de las matemáticas, como la diferencia entre una magnitud escalar y una vectorial, vectores y sus propiedades, identidades y funciones trigonométricas; otros, provenientes de la física, como las leyes del movimiento de Newton, las nociones de fuerza, fricción, trabajo, potencia, energía y las unidades empleadas para expresarlas.

Emplearás las características de los vectores para —tanto gráfica como algebraicamente— aplicarlos en la descripción de fuerzas y en la resolución de problemas, usando al mismo tiempo razones y funciones trigonométricas al manipular cantidades vectoriales. Analizarás cómo la fricción es una fuerza que surge del contacto de dos materiales, y notarás cómo las tres leyes de Newton aparecen en situaciones de la vida cotidiana, y permiten analizarlas con mayor profundidad.

Aprenderás el significado que en física se le da a la palabra “trabajo”, y cómo ese importante concepto da lugar a la noción de potencia y se relaciona íntimamente con la idea de energía mecánica, de la cual estudiarás dos tipos: cinética y potencial.

Finalmente, fortalecerás tu creatividad, tu autonomía, y tu actitud analítica y sistemática.

Una ruta sugerida para abordar los saberes es la siguiente:

- **Dinámica del movimiento**
  - La rampa de emergencia
  - Entendiendo el movimiento
  - Primera ley del movimiento de Newton
  - Segunda ley del movimiento de Newton
  - Tercera ley del movimiento de Newton
  - Las tres leyes del movimiento de Newton
  - Vectores y las leyes de Newton
  - Newton en acción
  - En equilibrio
  - Trabajo
  - Energía
  - Todo se va a alguna parte: trabajo y conservación de la energía
  - Construyendo la rampa de emergencia
  - El final

## ¿Cuáles serán los resultados de mi trabajo?

Cuando termines de estudiar la unidad, deberás ser capaz de:

- Identificar variables y constantes en las relaciones y funciones que expresan la primera, segunda y tercera leyes de Newton en fenómenos físicos observables en situaciones de tu entorno.
- Utilizar métodos algebraicos para obtener resultados cuantitativos en la solución de problemas relacionados con los vectores.
- Construir e interpretar gráficas de vectores en situaciones problemáticas.
- Utilizar software matemático para la representación e interpretación de las leyes de Newton en fenómenos físicos observables en tu vida cotidiana.
- Argumentar tus conclusiones sobre una investigación descriptiva referente a fuerza y fricción.
- Reflexionar sobre el concepto de fuerza como causa del cambio en el estado de movimiento o aceleración por medio de situaciones problemáticas.
- Resolver de manera analítica situaciones problemáticas que involucren el cálculo de trabajo, energía y potencia por medio de herramientas matemáticas.

## ¿Cómo organizaré mi estudio?

A estas alturas, seguramente ya eres bastante bueno organizando tus tiempos de trabajo. Las cosas no han cambiado respecto a las dos unidades anteriores: es recomendable que trabajes por lo menos de tres a cuatro horas diarias de lunes a viernes, de modo que tu avance por la unidad sea similar al que se propone a continuación:

- **Semana 4.** El lunes o martes de esta semana debiste terminar con la unidad 2. Del miércoles al viernes deberías llegar hasta la actividad *de la sección Suma de vectores empleando componentes axiales*. Aprenderás sobre las tres leyes del movimiento de Newton, las cuales son fundamentales para gran parte del conocimiento físico de nuestro tiempo, y abordarás cuatro conceptos sutiles pero no menos importantes: vectores, fuerza, fuerza neta y fuerza debida a la fricción. Encontrarás actividades experimentales, en las que manipularás vectores y mejorarás tu comprensión sobre la naturaleza de estos objetos.
- **Semana 5.** Hay que ir de la actividad *Newton en acción* hasta el final de la unidad, incluyendo ¿Ya estoy preparado(a)? (evaluación final) del módulo. En esta última parte, aprenderás sobre qué es el trabajo y la energía en Física, sobre la interesante relación entre ambos y cómo puede emplearse esa relación para resolver numerosas situaciones problemáticas que suelen presentarse en nuestro entorno.

  ¡Adelante!

INICIO

## La rampa de emergencia

Eres el encargado de diseñar una rampa de emergencia para vehículos sin frenos, en una zona de pendientes en la carretera México-Toluca.

Tu rampa debe poder detener desde automóviles compactos hasta camiones de carga que vayan a la velocidad máxima permitida en la carretera. Estará cubierta de grava suelta que funcionará como mecanismo de frenado, al ofrecer una mayor resistencia al movimiento de los vehículos que el asfalto de la carretera.

La empresa constructora quiere saber qué tan larga deberá ser esta rampa, pues necesitan la información para determinar cuánto costará su construcción y mantenimiento.

De acuerdo a tus conocimientos de Física en este momento, ¿qué elementos crees que sean necesarios para efectuar el cálculo de dicha longitud?

Con el estudio de esta unidad notarás que las leyes de Newton y los conceptos de trabajo y energía te serán muy útiles para comprender mejor cómo responder estas preguntas. Al finalizar la unidad volveremos a esta situación, y serás capaz de efectuar todos los cálculos necesarios para darle a la empresa la información que necesita.

Pasa a la siguiente sección, ¡éxito!

DESARROLLO

## Entendiendo el movimiento

Desde tiempos antiguos, el estudio del movimiento y sus causas habían sido un problema central en filosofía natural (la rama del conocimiento que hoy llamamos “Física”). Sin embargo, hasta la época de Galileo Galilei (1564-1642) no se habían logrado muchos progresos en la materia (ver sección *El péndulo,* en la unidad 2).

Antes de Galileo, dominaba la idea aristotélica de que para mantener un cuerpo en movimiento era necesario aplicarle continuamente una fuerza; eso tenía sentido si se pensaba en un bloque de piedra que sólo se mantiene en movimiento mientras lo empujamos, pero ¿qué hay del caso de una flecha, que una vez disparada se sigue moviendo aunque ya no actúe ninguna fuerza sobre ella —sin contar a la fricción del aire, que en todo caso se opone a su movimiento?

Figura 3.1 En un automóvil sucede lo mismo que en el transporte público, si el conductor frena, él, como los pasajeros, experimentará un movimiento hacia adelante.

Dificultades como esta hacían sospechar que algo no estaba del todo correcto con las concepciones de Aristóteles sobre el movimiento. Sin embargo, nadie antes de Galileo había encontrado una alternativa fundamentada que explicara los mismos fenómenos de una manera más satisfactoria.

Fue Galileo quien descubrió que el problema principal estaba en suponer que para mantener un cuerpo en movimiento hacía falta aplicarle una fuerza, y propuso que en realidad, un objeto que estuviera moviéndose con rapidez constante continuaría haciéndolo, a menos que una fuerza se opusiera a ello; del mismo modo, un objeto en reposo permanecería en reposo, a menos que una fuerza lo hiciera moverse.

Esta importantísima idea llevó al concepto de **inercia**: la tendencia de un objeto a mantenerse en su estado actual de movimiento, si no actúa sobre él alguna fuerza que se oponga a ello.

En la actualidad, tenemos muchas ocasiones de experimentar inercia: cuando vas en un transporte público y el chofer frena bruscamente, sientes un "empujón" hacia adelante porque tu cuerpo "trata" de mantenerse en movimiento. Cuando el transporte está estacionado y de forma brusca el chofer acelera, sientes un "jalón" hacia atrás: tu cuerpo "trata" de mantenerse en reposo. Tu cuerpo "trata" de mantener su estado actual de movimiento, a menos que alguna fuerza (en este caso, proporcionada por el motor del transporte) se oponga a ello.

Sin embargo, en la época de Aristóteles —y en la de Galileo también— no había muchas formas de darse cuenta de que la inercia existía. Es por eso que la idea galileana es tan genial.

Isaac Newton (1643-1727) fue una de las personalidades más extraordinarias que ha visto el mundo. Matemático, filósofo, teólogo, inventor y alquimista inglés, refinó las ideas de Galileo y logró establecer las tres leyes que llevan su nombre, leyes que bastan para explicar prácticamente todo el movimiento en la naturaleza —dentro de ciertos límites— y que impulsaron el desarrollo de la tecnología hasta los increíbles niveles que vemos hoy. El concepto de la inercia, como verás en un momento, quedó incluido en la llamada primera ley de Newton. Las otras dos leyes hablan sobre la influencia de las fuerzas en el movimiento de los objetos, y sobre la imposibilidad de "tocar sin ser tocado", para usar las palabras de Paul Hewitt (2004: 75) en su estupendo libro *Física conceptual, 9a. edición*.

¡Adelante, a descubrir más sobre las leyes de Newton!

**UN MOMENTO DE REFLEXIÓN**

Seguramente las leyes de Newton estarán involucradas, de una forma u otra, en la resolución del problema planteado al inicio de esta unidad: ¿qué tan larga deberá ser la rampa de frenado, para asegurar que cualquier vehículo que entre en ella logre detenerse? Este es un reto que lograrás superar conforme avances por esta unidad.

## Primera ley del movimiento de Newton

Realiza uno —si te es posible, ambos— de los experimentos que se proponen a continuación. Sigue las instrucciones correspondientes y responde lo que se pregunta:

### Fuera de la botella, dentro de la botella

#### Materiales

- Cinco o seis tuercas, o monedas pequeñas.
- Un aro de madera.
- Una botella en cuya boca quepan las tuercas o monedas.

Figura 3.2

**Procedimiento**

Coloca el aro de madera, equilibrado verticalmente, sobre la boca de la botella. Luego, coloca sobre el aro, formando una pila, las seis tuercas o monedas.

¿Cómo hacer que las seis tuercas o monedas terminen dentro de la botella, tocando sólo el aro de madera?

Piénsalo cuidadosamente, y luego pon en práctica tu idea. Inténtalo tantas veces como sea necesario, cambia de método si lo crees conveniente, hasta que logres que las seis tuercas o monedas terminen dentro de la botella, tocando sólo el aro de madera.

**Análisis**

I. ¿Cómo lograste meter los seis objetos en la botella?

II. ¿Por qué funcionó tu propuesta? ¿Qué tiene que ver el concepto de inercia (la tendencia de un objeto a mantenerse en su estado actual de movimiento a menos que una fuerza se oponga a ello) en todo esto?

Reflexiona cuidadosamente sobre tus observaciones en este experimento y responde las preguntas con todo el detalle que te sea posible.


**La moneda mágica**

**Materiales**

- Una moneda
- Un vaso de plástico
- Una tarjeta de cartoncillo más amplia que la boca del vaso

Figura 3.3

**Procedimiento**

Coloca la tarjeta de modo que tape la boca del vaso, y luego pon la moneda sobre la tarjeta. Con un solo movimiento, debes lograr que la moneda termine dentro del vaso, sin tocarla.

Reflexiona cómo conseguirlo y pon en práctica tu idea; inténtalo las veces que sea necesario. Si lo crees conveniente, prueba otros métodos. No te detengas hasta que logres que la moneda se encuentre dentro del vaso, sin tocarla y con un solo movimiento.

**Análisis**

I. ¿Cómo conseguiste el objetivo planteado?

II. ¿Por qué funcionó tu idea? ¿Tiene el concepto de inercia (la tendencia de un cuerpo a mantener su estado de movimiento a menos que una fuerza se oponga a ello) alguna relación con tus observaciones?

Reflexiona cuidadosamente sobre tus observaciones en este experimento y responde las preguntas con todo el detalle que te sea posible.

## *En reposo y en movimiento*

La primera ley de Newton, también conocida como ley de la inercia, explica por qué los objetos involucrados en los experimentos anteriores se comportan de la forma en que lo hacen.

Sin embargo, en ambos experimentos los objetos se hallaban en reposo, siendo que la primera ley habla también de objetos en movimiento:

Las sondas Voyager son dos artefactos que fueron lanzados por la NASA hacia el espacio exterior durante la década de los 70. Las sondas fueron lanzadas mediante poderosos cohetes cuya función fue impulsarlas más allá de la atracción gravitacional de la Tierra; una vez ahí, dejaron que el impulso las llevara flotando por el espacio, y durante los siguientes diez años ambas sondas se alejaron más y más, hasta que finalmente abandonaron el sistema solar.

Para saber más

**Las sondas Voyager**

En 1977, la estadounidense Administración Nacional de Aeronáutica y el Espacio (NASA, por sus siglas en inglés) lanzó al espacio exterior dos sondas no tripuladas, las Voyager 1 y 2. Ambas sondas llevan consigo un disco de cobre bañado en oro, en el que se grabaron imágenes características de nuestro planeta y la vida en él, música de diferentes partes del mundo, saludos en 55 idiomas distintos (comenzando por el acadio, una lengua que se hablaba en Sumeria hace 6 000 años, y terminando por el wu, un dialecto chino moderno) y especificaciones sobre la ubicación de nuestro planeta, todo en el verdadero lenguaje universal: las matemáticas.

Si algún día en el futuro distante, alguna civilización extraterrestre recupera las Voyager, el mensaje que llevan constituirá un testimonio de la humanidad y de su búsqueda de conocimiento y comprensión del universo.

3 **Mientras ningún objeto en el espacio se interponga en su camino,**

I. ¿Qué ocurrirá con las Voyager?

**UN MOMENTO DE REFLEXIÓN**

Con la situación planteada al inicio de la unidad y de acuerdo con lo discutido hasta el momento sobre la primera ley de Newton, ¿qué sucede con el movimiento de un vehículo que se queda sin frenos en la autopista? ¿Aumentará su velocidad cada vez más? ¿O al contrario, su velocidad irá disminuyendo? ¿De qué depende que ocurra cada una de esas dos posibilidades? ¿Qué papel juegan las rampas de frenado que se colocan en las autopistas, por qué funcionan? ¿Qué características consideras que deben poseer para funcionar correctamente?

Escribe tus reflexiones respecto a las preguntas anteriores, y agrégalas a tu portafolio del estudiante.

II. ¿Habrá algún cambio en sus velocidades?

La primera ley del movimiento de Newton establece qué es lo que ocurrirá con un objeto —en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme— si ninguna fuerza actúa sobre él.

Reflexiona sobre el resultado de los experimentos de la sección anterior y el ejemplo de las sondas Voyager, y enuncia con tus propias palabras qué es lo que dice esta primera ley de Newton.

Luego, describe al menos cinco situaciones de la vida real en las que hayas observado que esta ley intervenga.

En la sección *Las tres leyes del movimiento de Newton*, hay un enunciado correcto de la primera ley; no lo revises hasta que tengas uno tuyo, y hayas revisado las secciones correspondientes a la segunda y tercera leyes.

Hay un detalle que no hemos abordado respecto a esta primera ley del movimiento; tiene que ver con algo llamado "fuerza neta". Regresaremos al tema un poco más adelante; por el momento, pasa a la siguiente sección.

## Segunda ley del movimiento de Newton

Estás trabajando para reflexionar sobre el concepto de fuerza como causa del cambio en el estado de movimiento o aceleración por medio de situaciones problemáticas.

Coloca un libro o una libreta pequeña sobre la mesa en la que estés trabajando. Claramente, su velocidad —en el sistema de referencia de la mesa— es cero, el objeto se encuentra en reposo. La primera ley de Newton establece que se mantendrá así, a menos que una fuerza se oponga a ello.

Ahora empújalo por la superficie de la mesa. Como es evidente, la velocidad del objeto —siempre en el sistema de referencia de la mesa— deja de ser cero, es decir, hay un cambio en su velocidad en un tiempo determinado.

En otras palabras, la fuerza que aplicas al objeto le imparte una aceleración (no debería hacerte falta, pero si lo consideras necesario, revisa en la unidad 1, la sección *El cambio del cambio*).

**4** ¿Qué sucederá si ahora colocas un libro con mayor masa y lo empujas con la misma fuerza que empleaste en el primer caso? ¿Le impartirás la misma aceleración que al primer objeto? ¿Lograrás una mayor aceleración? ¿Será ésta menor?

Reflexiona. Imagina lo que sucedería en más casos, donde empujes —siempre con la misma fuerza— distintos objetos con pesos diferentes.

Usa tus observaciones e ideas para completar los espacios vacíos en la frase siguiente:

Para una misma _______________, a mayor _______________ corresponde una menor _______________.

¿? Asesoría

**La masa se opone a la aceleración**

Si recuerdas la definición de aceleración, te será claro que la afirmación anterior es equivalente a decir que la masa se resiste a cambiar su velocidad: piensa en un tren del metro estacionado. El tren ofrecerá una gran resistencia a ponerse en movimiento, resistencia que su motor deberá vencer. Después, cuando el tren viaja a una velocidad constante y se acerca a la siguiente estación, ofrecerá una gran resistencia a detenerse (el tren "quiere" mantener su velocidad sin cambios). En esta ocasión serán los frenos quienes tendrán que vencer esta resistencia.

Es a esta "resistencia" a la aceleración a lo que se conoce como inercia.

**5** Esto significa que, mientras la fuerza con la que empujas un objeto se mantenga constante, la masa $m$ y la aceleración $a$ del objeto serán cantidades inversamente proporcionales.

Ahora piensa y responde:

I. ¿Qué sucede si empujas un mismo objeto, primero con una fuerza determinada, y luego con una fuerza mayor?

II. ¿Qué efecto tiene la fuerza que emplees en la aceleración que se imparte al objeto?

III. ¿Sería correcto decir que "el doble de fuerza producirá el doble de aceleración"?

¿? Asesoría

La fuerza causa aceleración. Mientras la masa se opone a acelerar, la fuerza es un agente que provoca aceleración. De esta manera, fuerza y masa "luchan" entre sí, una causando aceleración, la otra oponiéndose a ella. Si piensas de nuevo en el tren del metro, su motor ejerce una fuerza sobre él, cuyo efecto es acelerarlo, sacarlo del reposo para ponerlo en movimiento. Esta fuerza debe "luchar" contra la tendencia de la masa del tren a permanecer en reposo.

Cuando el tren se acerca a la estación siguiente, los frenos ejercen una nueva fuerza cuyo efecto también es acelerarlo, esta vez para llevarlo al reposo (recuerda que una aceleración es un cambio en la velocidad; detenerse después de llevar una cierta velocidad también es acelerar). Esta fuerza debe "luchar" contra la tendencia de la masa del tren a continuar en movimiento.

Discute estas preguntas y sus posibles respuestas con tu experto de confianza y con otros estudiantes de bachillerato. Luego usa tus conclusiones para llenar los espacios vacíos en la frase siguiente:

Para una misma ____________________, a mayor ____________________ corresponde una mayor ____________________.


En otras palabras, mientras la masa del objeto se mantenga constante, la fuerza $F$ que se le debe aplicar para lograr una aceleración $a$ son cantidades directamente proporcionales.

Toma en cuenta (refiérete al Apéndice 4 para más detalles) que si dos cantidades $a$ y $b$ son directamente proporcionales, entonces se les puede relacionar mediante una expresión de la forma $a = kb$, donde $k$ es una constante llamada "constante de proporcionalidad".

Por otro lado (consulta el mismo Apéndice 4 para averiguar más al respecto), si $a$ y $b$ son cantidades inversamente proporcionales, entonces se pueden relacionar mediante una ecuación de la forma $ab = k$, donde $k$ es una constante de proporcionalidad inversa (que seguramente será diferente a la constante de proporcionalidad que aparece en el caso anterior).

Reflexiona al respecto detenidamente, y escribe una sola expresión que cumpla con ambas condiciones:

I. $F$ y $a$ son directamente proporcionales.

II. $m$ y $a$ son inversamente proporcionales.

La segunda ley del movimiento de Newton reúne todas estas observaciones; básicamente, establece dos cosas:

- Cuál es el efecto sobre el estado de movimiento de un objeto al aplicarle una fuerza, y
- La naturaleza de la relación fuerza-masa-aceleración.

III. Escribe un enunciado de la segunda ley en tus propias palabras, acompañándolo de la expresión que hayas escrito, que debe expresar la proporción directa fuerza-aceleración, y la proporción inversa masa-aceleración.

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

En la sección *Las tres leyes del movimiento de Newton*, encontrarás un enunciado y una expresión que son correctos, pero no las revises hasta que hayas elaborado un enunciado propio que te deje satisfecho(a) y hayas estudiado las secciones correspondientes a la primera y tercera leyes.

7 Elabora también una lista de al menos cinco situaciones en las que hayas observado la segunda ley en tu entorno: una fuerza aplicada a un objeto le causa una aceleración; además mientras mayor sea la masa del objeto, menor será la aceleración —o mayor la fuerza necesaria para darle una aceleración determinada.

**UN MOMENTO DE REFLEXIÓN**

De acuerdo con lo discutido en esta sección ¿qué será más fácil de detener, un auto compacto con una masa de una tonelada o un camión de carga con una masa cincuenta veces superior, suponiendo que ambos se mueven con la misma velocidad? ¿Cómo crees que afecte este hecho el diseño de la rampa de frenado que se quiere construir en la situación planteada al inicio de la unidad?

Escribe tus respuestas e inclúyelas en tu portafolio del estudiante.

## Masa y peso

A primera vista, "masa" y "peso" pueden parecer sinónimos. Sin embargo, no lo son. Comprender las leyes de Newton requiere que antes de continuar, tengas claro qué significa cada concepto, cómo se relacionan y cuáles son las diferencias entre ellos.

8 Contesta las siguientes preguntas, adaptadas de Hewitt (2004: 65). Si es necesario recurre a fuentes de información diversas; podrías usar, por ejemplo, el propio Hewitt, P. (2004). *Física conceptual*. 9ª ed. México: Pearson Educación.

De ser posible comparte tus respuestas con tu experto de confianza.

I. ¿Cuál es la relación entre inercia y masa?

II. ¿Cuál es la relación entre masa y peso?

III. ¿Qué ocurre con el peso de un objeto cuando se le coloca
   1. a nivel del mar?
   2. en lo alto del Monte Everest?
   3. en la superficie de la Luna?

IV. ¿Qué ocurre con su masa en las mismas condiciones de la pregunta anterior?

¿? Asesoría

**Fuerza, aceleración y vectores**

Un vector es una cantidad que posee tanto magnitud como dirección. Una fuerza es, por lo tanto, un vector (para especificar por completo una fuerza, no basta con decir su magnitud, también hay que decir la dirección en la que actúa).

La segunda ley de Newton relaciona fuerza y aceleración; expresa en un sólo enunciado la resistencia de la masa a acelerar, y el papel de la fuerza como generadora de aceleración.

Una de sus implicaciones es que la aceleración también es un vector. Su dirección siempre es la misma que la de la fuerza neta aplicada sobre el objeto en cuestión, como lo veremos en las secciones siguientes.

V. Una cantidad es “fundamental” para un objeto si es propia de él, si no depende de factores externos al objeto. En ese sentido y de acuerdo con tus respuestas a las dos preguntas anteriores, ¿cuál es más fundamental, el peso o la masa?

VI. ¿Cuáles son las unidades que emplea el SI para medir masa? ¿Y para medir peso?

VII. ¿Cuál es el peso de un ladrillo de 1 kg?

VIII. ¿Cuál es la masa de un costal que pesa 50 N?

IX. Explica con todo el detalle que te sea posible, cuál es la diferencia entre peso y masa.

Continúa cuando tengas respuestas que te satisfagan para todas estas preguntas.


Para determinar la longitud correcta de la rampa de emergencia en la situación planteada al inicio de la unidad, se necesitará que conozcas el peso de los vehículos que deberá ser capaz de frenar. Calcula el peso de un automóvil cuya masa es de una tonelada, y el de un camión de carga con 50 toneladas de masa. Anexa tus cálculos, junto con una breve explicación, a tu portafolio del estudiante, pues te serán de gran ayuda más adelante.

No hemos discutido aún un asunto importante, relacionado con algo llamado “fuerza neta”, que está involucrado tanto en la primera como en la segunda leyes de Newton. Vamos para allá.

## *Fuerza neta*

Aristóteles pensaba que para que un objeto se mantuviera en movimiento, era necesario aplicarle continuamente una fuerza. Como se comentó en la sección *Entendiendo el movimiento*, eso no es del todo correcto.

¿Por qué no?

¿No es verdad que si quieres que un libro sobre la mesa se mueva, y luego se mantenga moviéndose, necesitas aplicarle una fuerza continuamente —empujándolo?

¿No es cierto que si dejas de aplicar la fuerza, el libro se detiene?

Entonces, ¿cuál es el error en la idea de Aristóteles? ¿Le faltaba tomar algo en cuenta?

Piénsalo un momento. Si lo crees necesario coméntalo con otras personas. Cierra el libro ahora y vuelve cuando tengas una respuesta de la que estés razonablemente seguro(a).

¿Listo? Cuando la primera ley de Newton afirma que un objeto mantendrá su estado actual de movimiento (sea este rectilíneo uniforme o de reposo) a menos que una fuerza se oponga a ello, se está refiriendo a la **fuerza neta** que actúa sobre el cuerpo: la fuerza total, la suma de todas las fuerzas que incidan sobre el objeto.

Cuando empujas un libro sobre la mesa, la fuerza que ejerces con tu mano no es la única que actúa sobre el libro. Hay en realidad cuatro fuerzas (sí, cuatro, contando la que aplicas tú; en las siguientes secciones abundaremos al respecto) que inciden sobre él, y la suma de todas ellas nos da una fuerza total, una fuerza neta, y es esa fuerza neta a la que se refiere la primera ley.

El hecho de que el libro necesite que continúes empujándolo para mantenerse en movimiento significa que hay —por lo menos— otra fuerza actuando sobre él, que se opone a su movimiento, y que lo detiene en cuanto dejas de empujarlo.

También la segunda ley se refiere a la fuerza neta: cuando afirma que una fuerza aplicada sobre un objeto le imparte una aceleración que es inversamente proporcional a su masa, está refiriéndose a la fuerza neta que actúa sobre el objeto.

La primera y la segunda leyes están relacionadas íntimamente si lo piensas en términos de fuerza neta: si la fuerza neta es cero, entonces el cuerpo no recibe ninguna aceleración (segunda ley) y por lo tanto se mantiene en su estado actual de movimiento (primera ley).

Hace un momento afirmamos que cuando empujas un libro sobre la mesa, actúan sobre el libro cuatro fuerzas. ¿Cuatro? Después de abordar la tercera ley de Newton en la siguiente sección, volveremos al tema para averiguar más al respecto.

Para saber más

**Albert Einstein y los *gedankenexperiment***

Un *gedankenexperiment* (palabra alemana que significa “experimento pensado”) es un experimento que una persona imagina para poner en consideración las implicaciones o consecuencias de alguna situación o acción, por lo general dentro del marco de una teoría. Que el experimento pueda o no realizarse en la vida real es una cuestión secundaria, pues la intención no siempre es llevarlo a cabo efectivamente, sino reflexionar sobre los escenarios que podrían presentarse bajo circunstancias determinadas.

El famoso científico alemán Albert Einstein desarrolló parte importante de su Teoría de la Relatividad gracias a un experimento pensado; el experimento consistía en responder a la pregunta “¿cómo vería yo un rayo de luz si pudiera correr a su lado, a su misma velocidad?”

Las implicaciones que Einstein dedujo ante esta situación lo llevaron a revolucionar la física del siglo XX. Los experimentos pensados, aunque sólo ocurran en la imaginación, pueden tener fuertes repercusiones en la realidad.

## Tercera ley del movimiento de Newton

Vas a hacer ahora una serie de “experimentos pensados”, que consisten en que imagines las situaciones que se describen a continuación y procures predecir lo que ocurrirá en cada una de ellas (si puedes llevar a cabo realmente las actividades que se proponen, hazlo).

10 En todos los casos siguientes, imagina que te encuentras en un suelo liso y perfectamente horizontal:

I. Estás sentado en una patineta junto a una pared, de manera que no tocas el suelo con ninguna parte de tu cuerpo. Con ambas manos, empujas la pared con todas tus fuerzas. ¿Qué sucede?

II. Estás sentado en la misma patineta, con varias pelotas en el regazo. Tomas varias de ellas y las arrojas con todas tus fuerzas hacia el frente. ¿Qué sucede?

III. Tú y un amigo están patinando, cuando se detienen uno frente al otro. Sin que ninguno se quite los patines, lo empujas con todas tus fuerzas (los dos logran mantenerse de pie todo el tiempo). ¿Qué ocurre con ambos?

Reflexiona cuidadosamente respecto a cada una de estas situaciones hipotéticas. En cada una de ellas, ejerces una fuerza sobre un objeto (la pared, la pelota, tu amigo). Y en todas ellas, ocurre algo en respuesta.

11 I. La tercera ley del movimiento de Newton establece qué es lo que ocurre cuando cualquier objeto ejerce una fuerza sobre otro. De acuerdo con tus conclusiones en

los experimentos pensados de los párrafos anteriores, propón un enunciado —con tus propias palabras— de lo que afirma la tercera ley.

II. Elabora una lista de cinco situaciones que hayas observado en la vida real, en las cuales intervenga esta ley del movimiento.

En la sección *Las tres leyes del movimiento de Newton*, encontrarás un enunciado correcto de la tercera ley, pero no la revises hasta que tengas un enunciado tuyo que te deje satisfecho(a), y hayas estudiado las secciones correspondientes a la primera y segunda leyes.

## Fricción

Cuando tratas de empujar tu libro sobre la superficie de la mesa, la fuerza que ejerces sobre el objeto no es la única en juego, como podrás notar si haces la prueba ahora mismo.

Estás trabajando para argumentar tus conclusiones sobre una investigación descriptiva referente a fuerza y fricción

De hecho, habíamos afirmado en la sección *Fuerza Neta*, que en total hay cuatro fuerzas actuando sobre el libro, contando la que tú ejerces sobre él para empujarlo.

Para lograr que el libro se mueva, debes primero vencer una fuerza de fricción, o rozamiento, que el libro experimenta por su contacto con la superficie de la mesa. Esta fuerza se opone al movimiento, y no tiene que ver con la inercia: la fricción proviene del contacto de dos superficies y se opone siempre al deslizamiento de una de ellas sobre la otra.

Para comprender mejor la fricción, primero hay que analizar otras fuerzas involucradas en esta situación:

Mientras el libro yace sobre la mesa, la gravedad de la Tierra ejerce sobre él una fuerza que lo jala hacia abajo; se trata del peso del libro (sección *Masa y peso*). Por supuesto, el libro no acelera hacia abajo porque la mesa ejerce sobre él una fuerza de contacto hacia arriba, que al ser de igual magnitud pero con dirección opuesta al peso del libro, lo equilibra y da por resultado que permanezca en reposo.

**glosario**

**Normal:** en Geometría, la palabra "normal" es sinónimo de "perpendicular". Dos rectas son normales si al cortarse forman ángulos rectos.

La fuerza que ejerce la mesa sobre el libro se llama fuerza **normal**, y es directamente proporcional a la fricción: un libro muy pesado hará que la mesa ejerza sobre él una fuerza normal grande, y la fricción será correspondientemente grande; sobre un libro más ligero actuará una fuerza normal menor, por lo que la fricción también será más pequeña.

El hecho de que la fricción y la fuerza normal sean directamente proporcionales permite escribir

$$fr = \quad N$$

en donde $fr$ es la fuerza de fricción, $N$ es la fuerza normal, y $\mu$ (la letra griega "mu") es la constante de proporcionalidad entre ambas, que en este caso se denomina coeficiente de fricción. Bajo ciertas condiciones, el valor de $\mu$ depende del tipo de superficies involucradas, y existen tablas especializadas que consignan distintos valores de $\mu$ para varias parejas de superficies. Conviene señalar que $\mu$ es lo que se conoce como una cantidad adimensional: no tiene unidades.

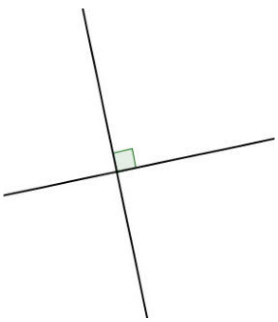


**Figura 3.4** Dos rectas normales: al cortarse, forman ángulos rectos.

Así que las cuatro fuerzas que actúan sobre el libro cuando lo empujas son:

1. La que ejerces sobre él al empujarlo.
2. La fuerza de fricción, que se opone al movimiento y es la responsable de que el libro se detenga cuando lo dejas de empujar.
3. El peso del libro, que la Tierra ejerce sobre él a través de la atracción gravitacional.
4. La fuerza normal que la mesa ejerce sobre el libro.

**Más información en...**

Para más información sobre el cociente de fricción cinética revisa el libro Resnick, R. *et al.* (2000). *Física. Vol. 1*. 4a ed. México: Compañía Editorial Continental.

12

Averigua el coeficiente de fricción cinética (la fricción que se opone al movimiento de un objeto que ya está moviéndose; no es igual que la fricción estática, que es la que se opone a que el objeto comience a moverse) para, por lo menos, tres parejas de materiales (por ejemplo, caucho y pavimento). Si lo requieres acude a la biblioteca más cercana a tu localidad y consulta algún libro de Física.

Luego calcula la fricción cinética que se opondría al deslizamiento de un objeto hecho de uno de esos materiales, sobre una superficie de otro de ellos. Efectúa tus cálculos para las tres parejas de materiales que investigues, y supón para el objeto que se desliza una masa de un kilogramo.

Llena esta tabla con tus resultados:

| Pareja de materiales | Fricción cinética |
|---|---|
| | |
| | |
| | |

**Ejemplo**

En realidad, es muy sencillo. El coeficiente de fricción cinética para corcho sobre metal es de aproximadamente 0.4. Si 1 kg de corcho se deslizara sobre una superficie de metal, esto significa que la fricción que se opondría al movimiento quedaría determinada por la ecuación

$$fr = \quad N$$

que entonces se convertiría en

$$fr = 0.4\left(9.81\ \text{m/s}^2\right)\left(1\ \text{kg}\right) = 3.92\ N$$

(recuerda que la fuerza normal es igual al peso del objeto, pues de lo contrario éste no se encontraría en equilibrio y sucedería una de dos cosas: se hundiría en la superficie, o saldría disparado hacia arriba).

Avanza a la siguiente sección cuando tengas terminados todos tus cálculos.

13 Si analizas la situación planteada al inicio de la unidad y te apoyas en lo discutido en esta sección, ¿cuántas fuerzas consideras que actúan sobre un automóvil sin frenos que se mueve por una carretera, como los que se quiere detener con ayuda de la rampa de frenado? ¿Cuáles serían estas fuerzas? ¿Cuáles se oponen al movimiento, cuáles lo favorecen, cuáles no hacen ni lo uno ni lo otro?

Incluye tus respuestas a estas preguntas en tu portafolio del estudiante, y sigue avanzando.

## Las tres leyes del movimiento de Newton

En las secciones anteriores has comenzado a explorar estas tres importantes leyes, que gobiernan prácticamente cualquier tipo de movimiento —dentro de límites que sólo se descubrirían con la llegada de dos teorías revolucionarias: la Teoría de la Relatividad de Einstein y la mecánica cuántica, ambas durante la primera mitad del siglo XX.

Estás trabajando para identificar variables y constantes en las relaciones y funciones que expresan la primera, segunda y tercera leyes de Newton en fenómenos físicos observables en situaciones de tu entorno y para utilizar software matemático para la representación e interpretación de las leyes de Newton en fenómenos físicos observables en tu vida cotidiana.

Para saber más

**Física moderna: Relatividad y mecánica cuántica**

Isaac Newton revolucionó la Física con sus leyes del movimiento, que contribuyeron de forma importantísima al avance de la ciencia y la tecnología desde el siglo XVII hasta el XX. La Física newtoniana, sin embargo, encontró retos que no pudo superar cuando esos mismos avances permitieron estudiar fenómenos de dos tipos: aquellos en los que intervienen grandes velocidades (cercanas a la de la luz, de 300 000 km/h) y aquellos que implican considerar tamaños infinitesimales (del orden de $10^{-35}$ metros).

(*Continúa...*)

(*Continuación...*)

En esas regiones extremas, las leyes de Newton —y con ellas la llamada mecánica clásica— dejan de funcionar. Para comprender los fenómenos que ocurren a esas escalas fue necesario desarrollar nuevas teorías: la relatividad de Einstein ayudó a comprender lo que ocurre cuando los objetos se mueven a altas velocidades, mientras que la mecánica cuántica de Heisenberg, Planck, Schrödinger y otros dio explicaciones satisfactorias sobre lo que ocurre en el dominio de lo infinitesimalmente pequeño.

Ambas teorías conforman lo que se conoce como Física moderna, y gracias a ellas hoy tenemos —por ejemplo— computadoras cada vez más compactas y veloces.

Examinemos ahora cada una de ellas:

**Primera ley: Inercia**

Un objeto que se mueve con velocidad constante se mantendrá en ese estado, a menos que incida sobre él una fuerza neta distinta de cero.

Recuerda que la velocidad es un vector (como lo viste en la unidad 1 en la sección *Vectores y una breve introducción a la Trigonometría*), por lo que decir “velocidad constante” es prácticamente equivalente a decir “movimiento rectilíneo uniforme”, con una pequeña excepción: “velocidad constante” también incluye el caso en el que la velocidad vale cero (y el objeto no se mueve), así que la primera ley también afirma que un objeto en reposo se mantendrá así, mientras no incida sobre él una fuerza neta diferente de cero.

**Segunda ley: Fuerza, masa y aceleración**

Una fuerza neta que actúe sobre un objeto le producirá una aceleración proporcional a la magnitud de la fuerza, y en la misma dirección. Además esta aceleración será inversamente proporcional a la masa del objeto.

La segunda ley suele resumirse en la expresión

$$F = ma$$

en la que $F$ es la fuerza neta que incide sobre el objeto, cuya masa es $m$ y sufre como consecuencia una aceleración $a$.

Revisa el Apéndice 4. ¿Por qué la expresión $F = ma$ implica que $F$ y $a$ son directamente proporcionales? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ¿Por qué esa misma expresión implica que $m$ y $a$ son inversamente proporcionales?

**Tercera ley: acción y reacción**

Siempre que un cuerpo ejerce una fuerza neta sobre un segundo cuerpo, el segundo cuerpo ejercerá sobre el primero una fuerza igual y en sentido opuesto.

¿? Asesoría

**Las unidades de la fuerza**

Toda magnitud física tiene unidades. La longitud se mide en metros, el tiempo en segundos, la masa en kilogramos, la aceleración en metros por segundo cuadrado.

La fuerza también tiene unidades; de acuerdo con la segunda ley de Newton, la fuerza es el producto de la masa por la aceleración, es decir, se multiplica una cantidad que se mide en kilogramos por otra que se mide en metros por segundo cuadrado. Es decir,

$$\text{kg} \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \frac{\text{kg} \quad \text{m}}{\text{s}^2}$$

Esta unidad compuesta ("derivada" es el término que se emplea en el SI) recibe el nombre de "newton", y se simboliza por la letra "N" mayúscula:

$$N = \frac{\text{kg} \quad \text{m}}{\text{s}^2}$$

De esta manera, la fuerza se mide en newtons, y un newton equivale a un kilogramo por metro sobre segundo cuadrado.

La primera fuerza suele llamarse "acción", mientras que la segunda suele denominarse "reacción": si empujas una pared (ejerces una fuerza de acción sobre la pared), sentirás cómo la pared te empuja a ti con una fuerza igual y en sentido contrario a la tuya (la pared ejerce sobre ti una fuerza de reacción).

A este respecto, es muy importante que tengas claro un punto: las fuerzas de acción y reacción actúan siempre sobre objetos diferentes. Cuando tu libro descansa sobre la mesa, la fuerza normal (sección *Fricción*) no es una fuerza de reacción al peso del libro. ¿Por qué no? Porque ambas actúan sobre el mismo objeto, el libro.

En realidad, la situación requiere que la analices con más cuidado:

Al estar el libro descansando sobre la mesa, ejerce sobre ella una fuerza de contacto. Esta fuerza de contacto es igual en magnitud al peso del libro, pero no actúa sobre él sino sobre la mesa: es una "acción", a la cual la mesa responde con una "reacción", la fuerza normal de la mesa sobre el libro. Mira la figura 3.5:

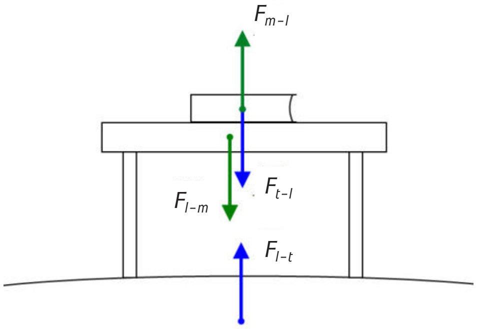



Figura 3.5 Las fuerzas representadas de color verde forman un par acción-reacción; las representadas de color azul forman otro par. La fuerza $F_{m-l}$ es la que ejerce la mesa sobre el libro y es la reacción a $F_{l-m}$, que es la fuerza que el libro ejerce sobre la mesa. Por su parte, $F_{t-l}$ es la fuerza de atracción que la Tierra ejerce sobre el libro (su peso) mientras $F_{l-t}$ es la reacción del libro, que también atrae a la Tierra. ¿Hay más pares acción-reacción que no se hayan incluido en esta figura? ¿Por qué ni la mesa, ni el libro, ni la Tierra experimentan aceleración?

¿? Asesoría

En la actualidad contamos con instrumentos mucho más precisos que aquellos con los que contaban Newton y sus contemporáneos. Gracias a ellos, hoy es posible verificar que las tres leyes del movimiento se cumplen con una precisión que hubiera sido imposible hasta hace tan sólo unos años.

La tecnología actual permite emplear, por ejemplo, distintas clases de sensores (detectores de movimiento, medidores de velocidad, sensores de fuerza), que conectados a una computadora y con la ayuda de software especializado, posibilitan la realización de experimentos con los cuales comprobar que un objeto mantendrá su estado de movimiento rectilíneo uniforme a menos que una fuerza neta se oponga a ello (primera ley), que la fuerza aplicada a un objeto es directamente proporcional a la aceleración experimentada por éste (segunda ley), y que la aplicación de una fuerza siempre trae como resultado la aparición de una fuerza de igual magnitud y dirección opuesta (tercera ley).

Además, gracias a la tecnología es posible explorar las leyes de Newton desde nuevas perspectivas. Un ejemplo excelente se encuentra en la página http://web.educastur.princast.es/proyectos/fisquiweb/Dinamica/dinamica2.htm. Visítala y realiza las experiencias que se sugieren ahí. Te ayudarán a desarrollar una comprensión más profunda de estas importantes leyes del movimiento.

Por otro lado, cuando tú empujas el libro, la reacción a tu empuje no es la fricción (de nuevo, ambas actúan sobre el mismo objeto). La reacción a tu empuje es la fuerza que el libro ejerce sobre tu mano, y que tú sientes como el "contacto" del libro sobre tu piel.


Reflexiona en el significado de las tres leyes del movimiento, cuyos enunciados acabas de leer, y contesta las siguientes preguntas con todo el detalle que te sea posible; escribe tus respuestas y discútelas con un experto de confianza:

I. El niño Adrián, de seis años de edad, jala un remolque en el que lleva sus juguetes. Identifica todas las fuerzas de acción y reacción que intervienen en esta situación, y especifica sobre qué objeto actúa cada una.

II. Adrián llega con su remolque a un lago congelado y trata de seguir avanzando caminando sobre el hielo. Explica, empleando las leyes del movimiento de Newton, lo que ocurrirá con el movimiento de Adrián.

III. La Tierra ejerce sobre ti una fuerza de atracción debida a la gravedad. ¿Cuál es la fuerza de reacción que le corresponde?

IV. Estás a bordo de un transporte público cuando éste se descompone y deja de avanzar. Desde el punto de vista de las leyes de Newton, ¿por qué no sirve de nada que todos los pasajeros se pongan a empujar desde la comodidad de sus asientos?

V. Un cañón dispara una bala a gran velocidad. ¿Por qué la aceleración que sufre la bala es mayor que la que sufre el cañón, si de acuerdo con la tercera ley, las fuerzas de acción y reacción tienen la misma magnitud?

VI. A Manuel le pidieron que jalara un remolque a lo largo de cierta distancia. Sin embargo, Manuel —que ha estudiado física— se opone diciendo: "debido a la tercera ley de Newton, la fuerza con la que yo jale el remolque siempre será igual a la fuerza con la que el remolque me jale a mí; entonces no tiene sentido que lo intente, pues nunca podré hacer que el remolque se mueva". ¿Tiene razón? ¿Por qué?

**UN MOMENTO DE REFLEXIÓN**

Si las tres leyes de Newton gobiernan cualquier movimiento, seguramente explican también el movimiento de los automóviles sin frenos en la carretera, y será necesario entenderlas correctamente para lograr determinar la longitud de la rampa de frenado de la situación planteada al inicio de la unidad. Todavía no tienes a tu alcance todos los elementos necesarios para hacerlo, pero estás más cerca de lo que crees.

## Vectores y las leyes de Newton

Las leyes del movimiento que acabamos de introducir permiten analizar una gran variedad de situaciones que involucren la acción de fuerzas. Lee con detenimiento la siguiente situación:

Estás trabajando para construir e interpretar gráficas de vectores en situaciones problemáticas.

> Jorge, Fabiola y Quetzal son tres amigos que juegan un curioso juego, que consiste en amarrar tres cuerdas a un aro de metal de 1.5 kg, y jalar el aro los tres al mismo tiempo, cada quien en una dirección determinada.

En un momento del juego, los tres amigos están colocados como en la figura 3.6.

En este momento es importante que recuerdes que una fuerza es un vector: tiene magnitud y tiene dirección. En la sección *Vectores y una breve introducción a la Trigonometría*, revisamos algunos aspectos importantes sobre cómo trabajar con vectores. En la figura 3.6 las flechas representan la fuerza con la que cada amigo jala el aro: si recuerdas, la longitud de la flecha indica la magnitud de la fuerza mientras que la dirección de la fuerza queda indicada por el ángulo correspondiente.

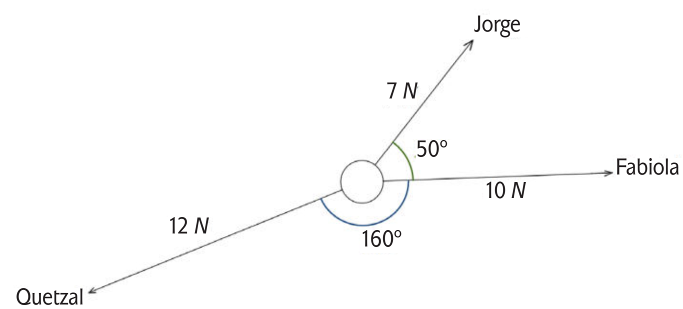



Figura 3.6 Representación de los tres amigos tirando del aro de metal, cada uno en una dirección distinta. La longitud de cada flecha indica la magnitud de la fuerza con la que esa persona está jalando.

La primera pregunta que podemos plantear —y responder— es:

En las condiciones de la figura 3.6, ¿en qué dirección se moverá el aro?

De acuerdo con la primera ley de Newton, el aro se mantendrá en reposo a menos que actúe sobre él una fuerza neta distinta de cero. La fuerza neta, según lo estudiado en la sección *Fuerza neta*, es la suma de todas las fuerzas que inciden sobre él.

De acuerdo con la segunda ley, el aro sufrirá una aceleración directamente proporcional a la magnitud de la fuerza neta que actúe sobre él, y en la misma dirección que dicha fuerza neta.

Entonces, lo primero que necesitamos es calcular la fuerza neta que actúa sobre el aro: eso significa que necesitamos aprender a sumar vectores. De eso tratan las dos secciones siguientes, así que manos a la obra.

(Antes de continuar, nota que usaremos letra en **negrita** cuando nos estemos refiriendo a un vector, para distinguirlo de las magnitudes escalares).

## *Suma de vectores por el método del paralelogramo*

Existen varios métodos que permiten realizar esa clase de sumas. Uno de ellos es el método del paralelogramo. Mira primero la figura 3.7, que es una representación aún más simplificada de la situación descrita en la sección anterior.

Conviene mencionar que cuando dos o más vectores inciden en el mismo punto, como los que se observan en la figura 3.7, se les suele llamar *vectores concurrentes* (pues concurren en un mismo punto) o también *vectores angulares* (pues al concurrir, forman ángulos entre ellos). Por otro lado, dos vectores que están dirigidos en la misma dirección se llaman vectores *colineales* Observa las figuras 3.8a y 3.8b.

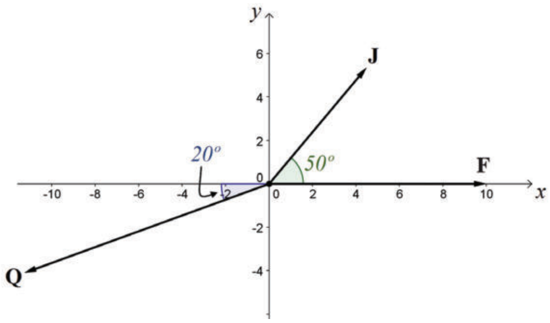



Figura 3.7 Una versión abstracta del juego de los tres amigos. Se incluye un sistema de referencia, cuyo eje positivo x coincide con la dirección de la fuerza **F**, correspondiente a Fabiola, y cuyo origen está colocado en la posición del aro, que además se representa por un punto. ¿Por qué el ángulo azul mide 20º? (Sugerencia: observa con cuidado la figura 3.6.)

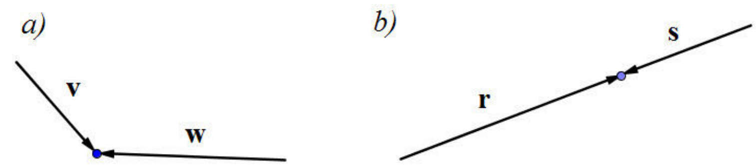



Figura 3.8 *a*) **v** y **w** son dos vectores concurrentes, o angulares. *b*) **r** y **s** son dos vectores colineales.

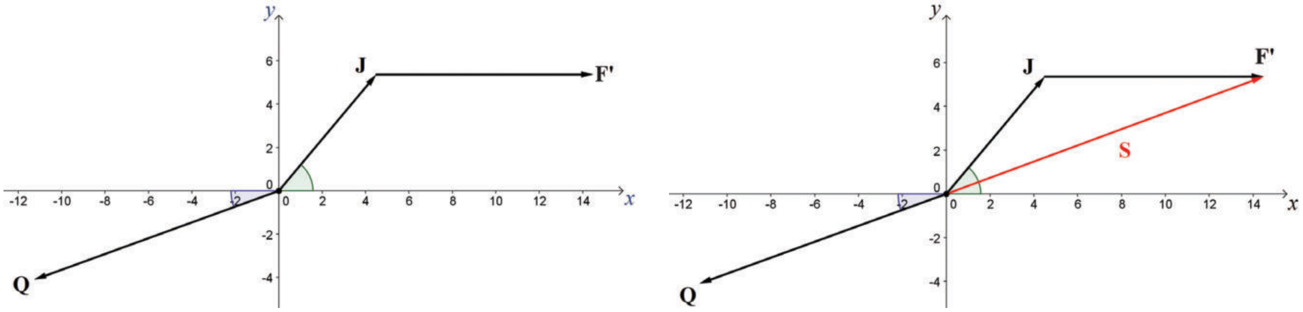



Figura 3.9 Método del paralelogramo para sumar vectores. En la figura 3.4a El vector **F** ha sido trasladado desde su posición en el origen de coordenadas hasta la punta del vector **J**; esta versión trasladada se denota por **F'**. Por otra parte, en 3.4b, la suma de los vectores **F** y **J** se obtiene trazando un nuevo vector, desde el origen de coordenadas hasta la punta del vector trasladado **F'**. En la figura se ha llamado **S** a este vector resultante.

Volvamos ahora a la suma de los vectores **J**, **F** y **Q**. Como veremos en un momento, el método del paralelogramo sirve para sumar sólo dos vectores, y aquí tenemos tres. Pero eso no es ningún problema: podemos usarlo para sumar primero dos de ellos, y luego para sumar el resultado con el tercer vector.

La idea en este método de suma de vectores es “tomar” al primero de ellos, y trasladarlo desde su posición en el origen de coordenadas hasta la “punta” del segundo vector. Mira la figura 3.9.


El resultado de la suma es otro vector, que aquí hemos llamado **S**. Para averiguar su magnitud y dirección tendrás que tomar una regla y un transportador y dibujar los tres vectores originales en una hoja de papel, respetando sus longitudes (por ejemplo, un vector que tiene una magnitud de 10 N se dibuja con 10 cm de longitud) y ángulos de dirección. Luego, dibuja el vector trasladado **F'** (ten cuidado de mantenerlo con la misma longitud y la misma dirección que el vector original **F**), y finalmente dibuja el vector resultante **S**. Mide su longitud con la regla y determina su ángulo de dirección con el transportador.

I. ¿Cuál es su magnitud?

______________________________

II. ¿Y su ángulo de dirección?

______________________________

No hemos terminado aún, todavía hace falta sumar este vector resultante **S** con el vector **Q**, que representa la fuerza con la que jala Quetzal. Observa la figura 3.10, que muestra la forma de realizar esta suma empleando de nuevo el método del paralelogramo:

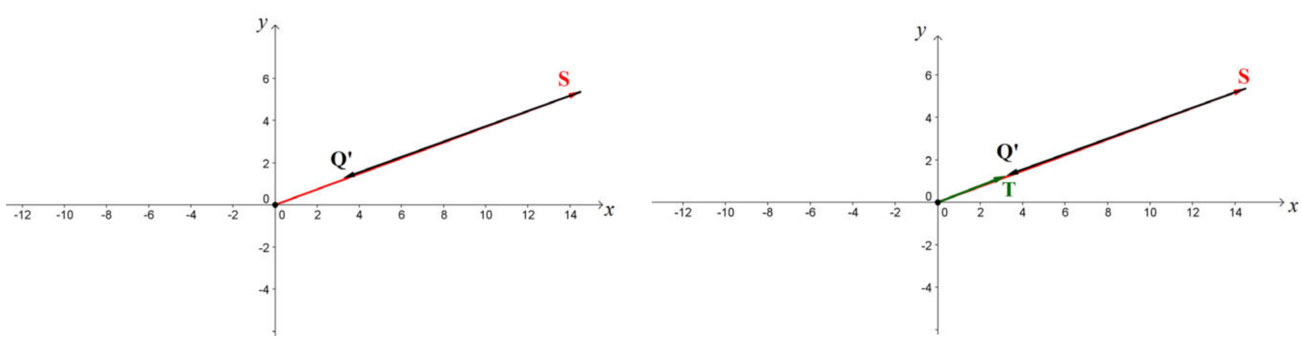



Figura 3.10 La suma del vector resultante **S** con el vector **Q**. En a) el vector **Q** ha sido trasladado desde su posición en el origen de coordenadas hasta la punta del vector **S**; esta versión trasladada se denota por **Q'**; nota cómo **S** y **Q'** quedan prácticamente "encimados". Por otra parte en b) La suma de los vectores **Q** y **S** se obtiene trazando un nuevo vector, desde el origen de coordenadas hasta la punta del vector trasladado **Q'**. En la figura se ha llamado **T** a este vector resultante total.

De este modo la fuerza neta que actúa sobre el aro queda representada por el vector **T**, que es resultado de la suma de los tres vectores **J**, **F** y **Q**.

Observa que **T** apunta en dirección contraria a la fuerza que ejercía Quetzal; eso significa que aunque él jalaba con una fuerza mayor, Jorge y Fabiola —que jalaban con menos fuerza pero en direcciones tales que se ayudaban entre sí— terminan ganándole, y el aro se moverá hacia donde están ellos dos.

16 En tu dibujo, usa regla y transportador para realizar la suma de **S** con **Q** empleando este método, y determina:

I. La magnitud de la fuerza neta **T**.

II. El ángulo de dirección de la fuerza neta **T**.

III. Luego, usa la segunda ley de Newton para calcular la aceleración que sufrirá el aro (recuerda que su masa es de 1.5 kg).

El método del paralelogramo tiene la ventaja de ser relativamente sencillo de emplear, pero a cambio tiene un par de desventajas que probablemente hayas notado al realizar tus dibujos: sólo puedes emplearlo para sumar dos vectores a la vez, y puede ser poco preciso. El método que veremos a continuación emplea la noción de componentes axiales de un vector (sección *Vectores y una breve introducción a la Trigonometría*) para realizar la misma suma; puede ser un poco más laborioso, pero a cambio nos dará una gran precisión y permite sumar cualquier número de vectores a la vez.

## Suma de vectores empleando componentes axiales

Mira la figura 3.11:

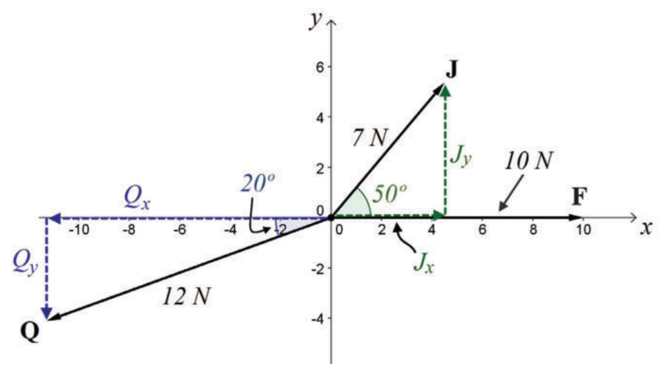



Figura 3.11 Los tres vectores que representan las fuerzas con las que jalan los tres amigos. Se han incluido en el dibujo las componentes axiales (ver sección *Vectores y una breve introducción a la Trigonometría*) de **J** y **Q**. ¿Por qué **F** no parece tener componentes axiales?)

La idea en el método de suma por componentes axiales es la siguiente: en lugar de sumar directamente los vectores, descomponerlos en sus componentes axiales y luego sumar estos componentes: los verticales con los verticales y los horizontales con los horizontales.

El resultado serán los componentes horizontal y vertical del vector resultante total, con los cuales será posible determinar su magnitud y su dirección.

Revisa la sección *Vectores y una breve introducción a la Trigonometría*, y la figura 3.11 para verificar por qué las componentes axiales de **J** son

$$J_x = 7 \cos 50°$$
$$J_y = 7 \text{ sen } 50°$$

Mientras que los de **Q** son

$$Q_x = 12 \cos 20°$$
$$Q_y = 12 \text{ sen } 20°$$

Gracias a la forma en que decidimos colocar nuestro sistema de referencia, **F** no tiene componente en la dirección y (lo cual también puede interpretarse diciendo que esa componente vale cero, $F_y = 0$), mientras que su componente en la dirección $x$ coincide con su propia magnitud; en otras palabras,

$$F_x = 10$$
$$F_y = 0$$

Ahora, sumamos todas las componentes horizontales para obtener la "componente horizontal resultante" $T_x$:

$$T_x = J_x - Q_x + F_x = 7 \cos 50° - 12 \cos 20° + 10 = 3.22$$

Nota que la componente $Q_x$ se restó en lugar de sumarse. Entenderás porqué si observas la figura 3.11: tanto $J_x$ como $F_x$ apuntan en la dirección horizontal positiva del sistema de referencia (es decir, a la derecha), mientras que $Q_x$ lo hace en la dirección horizontal negativa (a la izquierda). Para tomar eso en cuenta, es necesario considerar a $Q_x$ como una cantidad negativa, por lo que al efectuar la suma, $Q_x$ termina restándose a las otras componentes.


Toma una calculadora científica y asegúrate de que el valor de $T_x$ es realmente el que acabamos de hallar. Recuerda ajustar tu calculadora para que maneje los ángulos en grados (el procedimiento de ajuste dependerá del modelo de tu calculadora, consulta su manual).

Ahora procedemos de manera análoga con las componentes verticales:

$$T_y = J_y - Q_y + F_y = 7 \text{ sen } 50° - 12 \text{ sen } 20° + 0 = 1.26$$

Nuevamente, $J_y$ y $F_y$ apuntan en la dirección vertical positiva (hacia arriba) por lo que se les toma como positivos, mientras que $Q_y$ apunta en la dirección vertical negativa (hacia abajo), y por ello debe restarse en lugar de sumarse con las demás componentes.

**18** Toma una calculadora científica y asegúrate de que el valor de $T_y$ es en efecto el que se acaba de presentar.

Acabamos de obtener las componentes del vector resultante total; mira la figura 3.12:

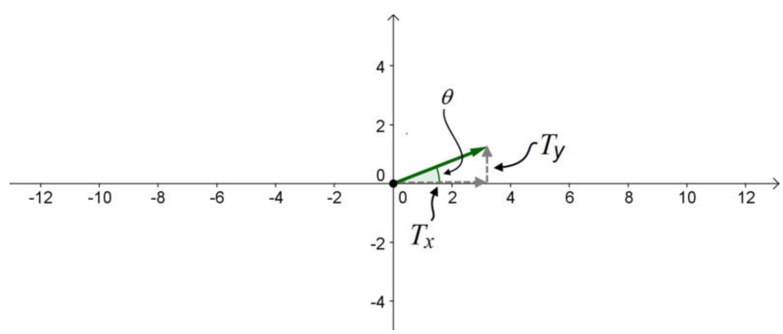



Figura 3.12 El vector resultante total **T** con sus componentes axiales $T_x$ y $T_y$.

Conociendo los valores de estas componentes, podemos calcular la magnitud de **T** mediante el teorema de Pitágoras:

$$T = \sqrt{3.22^2 + 1.26^2} = 3.46$$

Por otro lado, el ángulo de dirección $\theta$ se puede deducir a partir de

$$\tan\theta = \frac{1.26}{3.22}$$

Esta ecuación permite despejar al ángulo $\theta$; para ello, es necesario transponer la razón tangente del miembro izquierdo al derecho, empleando lo que se conoce como su "razón inversa". La razón inversa de la tangente ($\tan^{-1}$) nos dará valor del ángulo cuya tangente vale $\frac{1.26}{3.22}$.

Así, al efectuar el despeje se tendrá

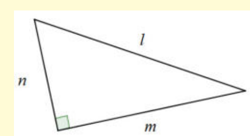
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1.26}{3.22}\right) = 21.367°$$

(Revisa la sección *Vectores y una breve introducción a la Trigonometría*; en particular recuerda la definición de la tangente de un ángulo, y verifica por qué el ángulo $\theta$ se puede determinar de esa forma).

Así que mediante el método de componentes axiales hemos hallado la magnitud y la dirección del vector resultante **T**, que es la suma de las tres fuerzas que

**Para saber más**

El Teorema de Pitágoras es quizá uno de los resultados mas conocidos de las matemáticas. Básicamente, establece que en cualquier triángulo rectángulo (triángulo que contenga un ángulo recto), la suma de los cuadrados de los dos lados que forman el ángulo recto (llamados catetos) es igual al cuadrado del tercer lado (la hipotenusa del triángulo).




Para este triángulo, el teorema de Pitágoras establece que $n^2 + m^2 = l^2$

tiran del aro. Compara estos resultados con los que obtuviste mediante el método del paralelogramo en la sección anterior.

## *Suma de vectores empleando leyes de los senos y los cosenos*

Otra posibilidad para realizar la suma de vectores es mediante el empleo de las llamadas leyes de los senos y los cosenos. Se trata de dos leyes que involucran, respectivamente, a los senos y los cosenos de los ángulos de un triángulo cualquiera; para ilustrar ambas leyes, considera el triángulo de la figura 3.13:

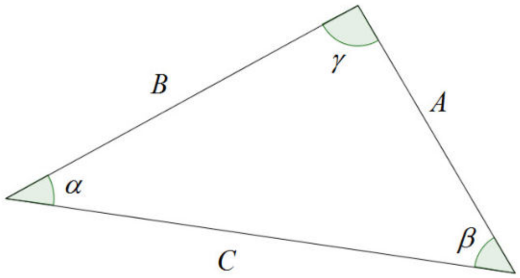



Figura 3.13 La ley de los senos es válida para cualquier triángulo, al igual que la ley de los cosenos.

La ley de los senos establece que, en cualquier triángulo,

$$\frac{A}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{B}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{C}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Es decir, el cociente “longitud de un lado” / “seno del ángulo opuesto” se mantiene constante para los tres lados y los tres ángulos del triángulo.

Por su parte, la ley de los cosenos afirma que, en cualquier triángulo,

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma$$

Es decir, uno de los lados (en este caso se eligió a $C$, pero pudo haberse elegido a cualquier otro) es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble del producto de esos dos, por el coseno del ángulo que forman.

Para ilustrar el uso de estas leyes en la suma de vectores, volvamos a la situación planteada en las dos secciones anteriores; efectuaremos la suma de **F** más **J** empleando dichas leyes.

Cuando esa suma se realizó mediante el método del paralelogramo, el vector **F** se trasladó hacia la punta del **J**. La suma de ambos, **S**, formaba un triángulo con ellos, como se muestra en la figura 3.14:

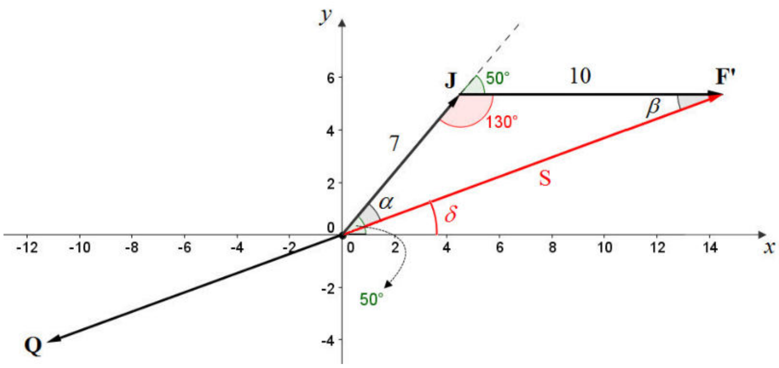



Figura 3.14

Nos concentraremos momentáneamente en el triángulo que se forma con **F**, **J** y **S**. Las magnitudes de **F** y **J** son conocidas y se muestran en la figura, al igual que el ángulo que forman entre ellos (130°; ¿porqué vale eso?). Pues bien, como las leyes de los senos y los cosenos se pueden aplicar a cualquier triángulo, podemos aplicarlas a este; la ley de los senos quedaría

$$\frac{10}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{7}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{S}{\operatorname{sen}130°}$$

Mientras que la ley de los cosenos (escribiéndola para el lado **S**) se convertiría en

$$S^2=7^2+10^2-2(7)(10)\cos 130°$$

Nota que en ambas leyes se está tratando únicamente con las magnitudes de los vectores, por lo que no se usa negrita.

La ley de los cosenos nos permite entonces calcular la magnitud de **S**; será

$$S^2=7^2+10^2-2(7)(10)\cos 130°$$
$$S^2=49+100-140\cos 130°$$
$$S^2=49+100+89.99$$
$$S^2=238.99$$
$$S=\sqrt{238.99}$$
$$S=15.46$$

Lo cual significa que la magnitud del vector **S**, resultado de la suma de **J** más **F**, es S = 15.46. Nos falta calcular su ángulo de dirección $\delta$; para ello, podemos primero usar la ley de los senos para calcular el ángulo $\alpha$ que **S** forma con **J**; sustituimos el valor de S en dicha ley, y tendremos

$$\frac{10}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{7}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{15.46}{\operatorname{sen}130^\circ}$$

Nos quedamos con el primer y el último cocientes (por el momento no nos interesa obtener el valor de $\beta$, y llegamos a

$$\frac{10}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{15.46}{\operatorname{sen}130^\circ}$$

Ahora despejamos el ángulo $\alpha$ como sigue:

$$\frac{10}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{15.46}{\operatorname{sen}130^\circ}$$

$$10=\left(\frac{15.46}{\operatorname{sen}130^\circ}\right)\operatorname{sen}\alpha$$

$$10(\operatorname{sen}130^\circ)=(15.46)\operatorname{sen}\alpha$$

$$\frac{10(\operatorname{sen}130^\circ)}{15.46}=\operatorname{sen}\alpha$$

$$\operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{10(\operatorname{sen}130^\circ)}{15.46}\right]=\alpha$$

$$29.70^\circ=\alpha$$

Recuerda que una razón trigonométrica se puede transponer de un miembro al otro de una ecuación empleando su razón inversa; en este caso, se ha usado la razón seno inverso, que se escribe $\operatorname{sen}^{-1}$. Su valor se obtiene con ayuda de la calculadora científica.

Observa ahora con atención la figura 3.15:

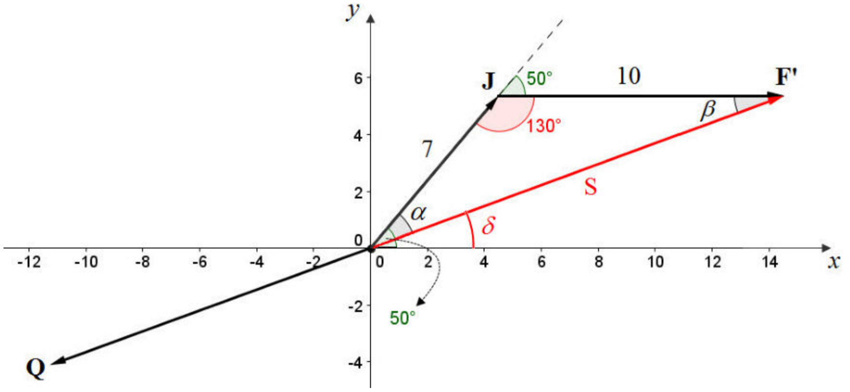



Figura 3.15

Verás que el ángulo que buscamos, δ, se puede obtener como la diferencia entre los 50° de dirección del vector **J** y los 29.70° que acabamos de calcular para $\alpha$. Es decir,

$$\delta = 50° - 29.70° = 20.30°$$

Así que hemos hallado tanto la magnitud como la dirección del vector **S**; en otras palabras, hemos efectuado la suma **J** + **F**.

Para finalizar el problema, el paso siguiente era llevar a cabo la suma **S** + **Q**; por el método del paralelogramo, ello requiere que el vector **Q** se traslade hasta la punta del **S**, como en la figura 3.16:

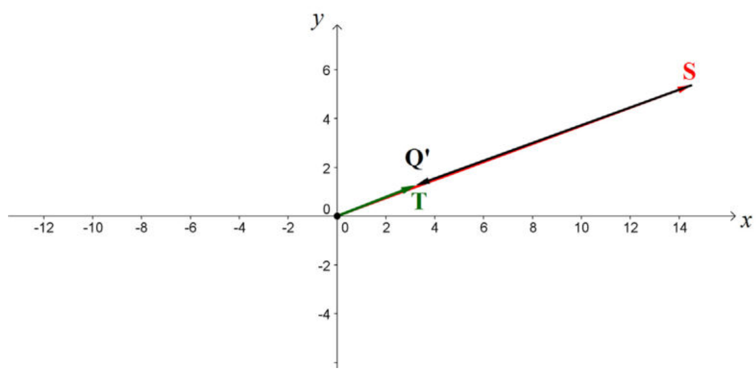



Figura 3.16

El vector **T** es el resultado de esa suma, y su magnitud y dirección podrían calcularse empleando de nueva cuenta las leyes de los senos y los cosenos; sin embargo, en este caso no es lo recomendable, pues como puedes apreciar, los vectores **S** y **Q** son prácticamente colineales, por lo que el "triángulo" que se forma con **S**, **Q** y **T** más bien tiene el aspecto de una línea recta. Entonces conviene calcular **T** empleando alguno de los otros dos métodos explorados con anterioridad.

19 Emplea los resultados obtenidos para la magnitud y la dirección de **T**, junto con la segunda ley de Newton, para determinar la magnitud y dirección de la aceleración que sufrirá el aro (el cual tiene una masa de 1.5 kg).

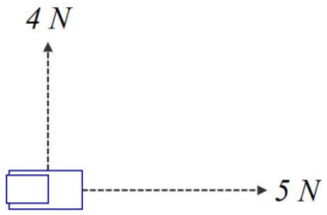
## Newton en acción

20 Emplea las leyes de Newton y lo que acaba de estudiarse sobre suma de vectores para resolver los siguientes problemas:

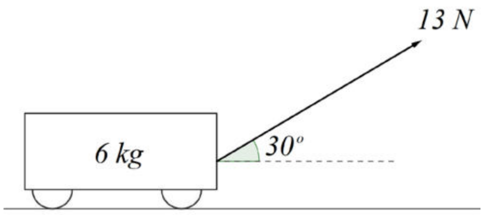
Estás trabajando para utilizar métodos algebraicos para obtener resultados cuantitativos en la solución de problemas relacionados con los vectores.

I. ¿Cuál es la aceleración que experimenta un paracaidista de 60 kg que se lanza de un avión, en un momento en el cual el aire le ofrece una fuerza de fricción de 20 N que se opone a su movimiento?

II. En un ejido de San Luis Potosí, Don Matías está terminando de arar la tierra para sembrar maíz. Después de quitarle la yunta a sus dos bueyes, tiene un momento de descuido y ambos animales deciden ponerse en movimiento, jalando cada uno por su lado, con fuerzas de magnitudes y direcciones que se muestran en la figura. Si el arado tiene una masa de 9 kg, ¿cuál será la magnitud de la aceleración que experimentará? ¿En qué dirección estará dirigida dicha aceleración? Ignora el efecto de la fricción del arado con la tierra.




III. Manuel finalmente accede (sección *Las tres leyes de Newton*) a jalar el remolque como se lo habían pedido. Al jalar, lo hace con una fuerza cuya magnitud y dirección se muestran en la figura. Si el remolque tiene una masa de 6 kg, y suponiendo que las rueditas del remolque lo hacen deslizarse por el suelo sin fricción, ¿cuál será la aceleración que le comunicará Manuel?




IV. ¿Cuál debería ser la magnitud de la fuerza ejercida por Manuel para que, manteniendo la dirección mostrada en la figura anterior, levante el remolque del suelo?

**Ejemplo**

Este problema puede ser bastante ilustrativo en el manejo de vectores. Supón que la fuerza que ejerce Manuel fuera de 5 N, que el ángulo con el que la aplica fuera de 40° y que el remolque tuviera una masa de 4 kg.

Al descomponer la fuerza en sus componentes axiales, tendríamos que éstas son

$$F_x = 5\cos 40°$$
$$F_y = 5\,\text{sen}\,40°$$

Si no hay fricción, el remolque acelera únicamente a causa de la componente $F_x$ de la fuerza con la que jala Manuel (mientras no lo levante, el remolque sólo se moverá en la dirección horizontal y en ausencia de fricción, sólo $F_x$ actúa en esa dirección). La segunda ley de Newton nos dice que entonces su aceleración será de $\frac{5\cos 40°}{4} = 0.96\,\text{m}/\text{s}^2$.

Por otra parte, para levantar el remolque Manuel tendría que jalar con una fuerza tal, que su componente vertical superara al peso del aparato; este peso de 9.81(4) = 39.24 N. Llamemos $F$ a la magnitud de esta fuerza desconocida. Entonces podemos escribir

$$F\,\text{sen}\,40° = 39.24$$

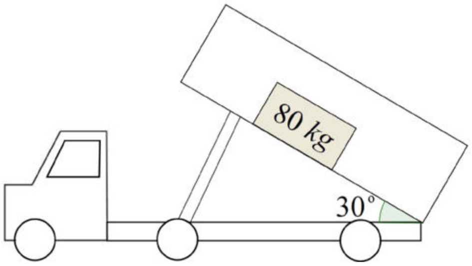
de donde obtenemos rápidamente

$$F = \frac{39.24}{\text{sen}\,40°} = 61.05\,\text{N}$$

En cuanto la fuerza de Manuel superara ese valor, levantaría al remolque del suelo.

V. Un camión de volteo lleva en la caja trasera un refrigerador viejo de 80 kg. Levanta la caja hasta que forma un ángulo de 30° con la dirección horizontal, como se ve en la figura. El coeficiente de fricción estática (la fricción que se opone a que el refrigerador comience a moverse) entre la superficie del refrigerador y la de la caja de volteo es de $\mu = 0.6$.

¿Será suficiente esta inclinación para que el refrigerador se deslice hacia abajo?




VI. De no ser así, ¿qué ángulo de inclinación será necesario para que comience el deslizamiento?

Continúa avanzando.

21 Supongamos que en la situación planteada al inicio de la unidad la rampa de emergencia se construirá de forma que tenga una pendiente de 10° sobre la horizontal. Imagina ahora un vehículo que se desplace sobre esa rampa: la acción de su peso (recuerda que el peso es una fuerza, y por lo tanto un vector) se descompone en dos direcciones, una perpendicular a la superficie de la rampa y otra paralela a esa superficie. Realiza un dibujo de la situación y suponiendo una masa de 50 toneladas para el vehículo, calcula la magnitud de ambas componentes.

Añade tu dibujo y los cálculos que realices a tu portafolio del estudiante.

## En equilibrio

22 Consigue los materiales que se enlistan a continuación y sigue las instrucciones:

**Materiales**

- Un objeto pequeño pero relativamente pesado, como una tuerca o un balín.
- Una báscula (puedes pedir permiso al dependiente de la tienda más cercana para que te permita usar la suya, sólo la necesitas para pesar el objeto pequeño con el que vayas a trabajar).
- Tres hilos de diferentes longitudes, lo suficientemente fuertes como para que cada uno pueda soportar el peso del objeto pequeño.
- Transportador.
- Clavos delgados
- Martillo
- Una tabla delgada de alrededor de un metro de longitud.
- Dos sillas de la misma altura.

**Procedimiento**

Antes de comenzar, reflexiona:

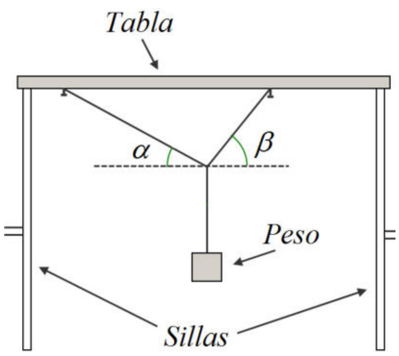
I. Una báscula, ¿te da el peso o la masa del objeto que coloques en ella?

_______________________________________________

Usa la báscula para obtener el ¿peso? ¿la masa? del objeto pequeño. Registra ese dato.

Amarra el objeto al extremo de uno de los hilos; amarra el otro extremo a los dos hilos restantes.

Fija los extremos libres de estos dos hilos a la tabla. Es importante que cada hilo tenga una longitud distinta, y que queden bien fijos a la tabla. Para ello, puedes usar el martillo para clavar dos clavos en la tabla, y usarlos para amarrar a ellos cada hilo. Luego, coloca la tabla de manera que quede sostenida en lo alto de las dos sillas, de modo que obtengas un arreglo parecido al de la siguiente figura:




El objetivo de esta actividad es que determines la tensión (la fuerza) que experimenta cada uno de los hilos al sostener el peso que colocaste. Para ello, necesitas considerar la tensión en cada hilo como un vector de fuerza, y tomar en cuenta un hecho muy importante: puesto que todo el arreglo está en reposo (cuida que así sea), la fuerza neta que actúa sobre el punto de unión de los tres hilos es cero. En otras palabras, la suma de los tres vectores es cero. Observa la figura 3.17:

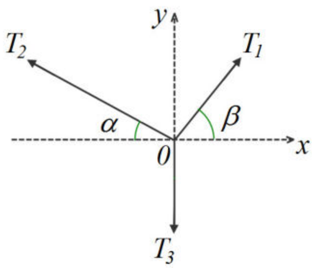



Figura 3.17 Versión abstracta del arreglo que debes construir. Cada hilo queda representado por la fuerza de tensión que experimenta. En la figura, estas tensiones se han señalado como $T_1$, $T_2$ y $T_3$.

Para expresar la suma de las tres tensiones necesitas un sistema de referencia. Coloca el origen de tu sistema de referencia en el punto donde se unen los tres hilos, como en la figura 3.17. Luego usa el transportador para determinar los ángulos $\alpha$ y $\beta$ (es importante que cuides la determinación de la dirección horizontal).

Conociendo estos ángulos, podrás escribir expresiones para las componentes axiales de los tres vectores $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$ y $\mathbf{T_3}$. Como la fuerza neta es cero, la suma de componentes horizontales y verticales debe valer también cero. Escribe las dos ecuaciones que expresan esto. Recuerda que si una componente se dirige a la izquierda o hacia abajo del plano se le debe considerar negativa.

Esas dos ecuaciones constituirán un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (la magnitud de la tensión $T_3$ se conoce; es igual al peso del objeto). Este sistema puede resolverse mediante un procedimiento que se describe a continuación:

Despejas a una de las dos incógnitas en una de las dos ecuaciones (tú decides qué incógnita despejarás y de qué ecuación lo harás; opta por la que permita un despeje más sencillo).

Sustituyes la expresión resultante en la otra ecuación. Ello te llevará a una nueva ecuación que tendrá una sola incógnita.

Resuelves esta nueva ecuación, encontrando así el valor de su única incógnita.

Cuando conozcas el valor de esa incógnita, lo sustituyes en cualquiera de las ecuaciones originales, para obtener el valor de la otra. Entonces habrás resuelto el problema.

Imagina, por ejemplo, que decides despejar a la magnitud de la tensión $T_1$ de la primera ecuación. A continuación sustituirías la expresión resultante en la segunda ecuación, lo que te daría como resultado una tercera ecuación en la que la única incógnita sería la magnitud de la tensión $T_2$.

Despejas $T_2$ para hallar su valor, y finalmente sustituyes ese valor en cualquiera de las ecuaciones originales para despejar ahora a $T_1$.

Revisa lo que has aprendido en otros módulos (como *Representaciones simbólicas y algoritmos*, y *Matemáticas y representación en el mundo natural*) para auxiliarte en este proceso.

Los arquitectos e ingenieros deben realizar cálculos similares a estos, para asegurarse de que las estructuras que construyen son estables y seguras.

## Trabajo

Estás trabajando para resolver de manera analítica situaciones problemáticas que involucren el cálculo de trabajo, energía y potencia por medio de herramientas matemáticas.

Al final de la sección *Las tres leyes del movimiento de Newton*, se te planteó una situación que podría parecer capciosa:

Si a consecuencia de una descompostura, el transporte público en el que vas se queda sin poder avanzar, no serviría de nada que los pasajeros —por muchos que fueran— se pusieran a empujar sin bajarse del transporte (la pregunta en aquella sección era ¿por qué?).

Si aún contra todo sentido común esa situación ocurriera y los pasajeros realmente se pusieran a empujar desde sus asientos, es probable que después de un rato comenzaran a sentirse cansados, sobre todo si empujan con todas sus fuerzas. Los pasajeros dirían que les “cuesta mucho trabajo” empujar de esa manera.

Pues resulta que desde el punto de vista de la física, no estarían realizando ningún trabajo:

En Física, el trabajo (abreviado $W$, por la palabra inglesa “work”, trabajo) que efectúa una fuerza $F$ al desplazar un objeto a lo largo de una distancia $d$, se calcula mediante la expresión

$$W = Fd$$

Hay que recordar que el desplazamiento debe ocurrir en la dirección en que es aplicada la fuerza. Eso será importante más adelante.

**23** **Averigua cuáles son las unidades del SI para medir trabajo. Luego responde las preguntas y realiza las actividades que se plantean a continuación:**

I. ¿Por qué los pasajeros del transporte público descompuesto no realizan trabajo —en el sentido de la física— si empujan desde el interior del transporte (aún si lo hacen con todas sus fuerzas)?

Haz una lista de otras cinco situaciones que cumplan las siguientes condiciones:

1. Una o más personas realicen alguna actividad que cotidianamente pudiera llamarse “trabajo”.
2. La actividad sea físicamente agotadora.
3. El trabajo físico (es decir, trabajo como se le entiende en física) realizado sea cero.

II. Ubica unas escaleras cercanas a tu casa (las de un puente, un edificio, una estación del metro, una banqueta,…). Usa una cinta métrica para determinar la altura de esas escaleras (sugerencia: mide la altura de cada escalón y luego suma estas alturas; si son demasiados escalones, puedes ahorrarte tiempo y esfuerzo si supones que todos miden lo mismo, tomas la medida de un solo escalón… ¿y después?). A continuación, calcula el trabajo que realizas al subir esas escaleras.

III. La **potencia mecánica** se define como la cantidad de trabajo realizado por unidad de tiempo. Es decir, la potencia $P$ desarrollada por realizar un trabajo $W$ en un tiempo $t$ es

$$P = \frac{W}{t}$$

Sus unidades en el SI son los watts (su abreviatura es la letra W; 1 W equivale a 1 J/s, como verás en un momento). Determina la potencia que eres capaz de desarrollar al subir las escaleras de la pregunta anterior.

**Gestión del aprendizaje**

En algunos campos científicos y técnicos muy particulares, se emplea un sistema de unidades basado en el centímetro, el gramo y el segundo (en lugar del metro, el kilogramo y el segundo, como es el caso del SI). Este sistema se conoce como "cgs" o "sistema cegesimal". En sistema cgs, la unidad de medida del trabajo es el ergio (erg).

1 erg equivale a $1 \times 10^{-7}$ J.

**Ejemplo**

Caminando a paso normal, puedo subir las escaleras que llevan al primer piso de mi edificio en 5 segundos. El primer piso se encuentra a 2.5 m del suelo, y tengo una masa de 62 kg. Para subir las escaleras, mis piernas deben ejercer una fuerza hacia arriba igual a mi peso, el cual vale 9.81(62) = 608.22 N. Al llegar al primer piso, he ejercido esa fuerza a lo largo de 2.5 m de distancia. Entonces el trabajo que realizo es de 608.22 N (2.5 m) = 1 520.55 N·m. La unidad de trabajo, N·m, recibe el nombre de joule, y se abrevia con la letra J. En otras palabras, el trabajo que realizo al subir al primer piso de mi edificio es de 1520.55 J.

Si me toma 5 segundos realizarlo, la potencia que desarrollan mis piernas es de

$$\frac{1520.55}{5} = 304.11\,\text{W}\,.$$

Observa cómo al dividir una cantidad expresada en joules (J) entre otra expresada en segundos (s), el cociente es una cantidad cuyas unidades son J/s, es decir, watts (W).

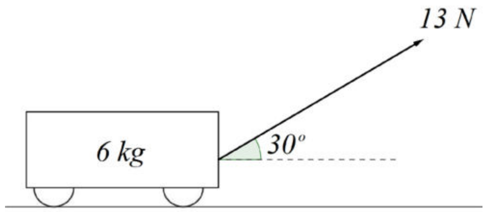
IV. ¿Qué requiere más trabajo: impulsar un tren del metro vacío desde el reposo hasta su máxima velocidad, o impulsarlo desde el reposo hasta esa velocidad mientras está lleno? Supón que en ambos casos la máxima velocidad se alcanza después de recorrer la misma distancia.

V. Roberto y Claudia son estudiantes de bachillerato, vecinos del tercer piso en el mismo edificio. Roberto pesa 70 kg y lleva una mochila de 6 kg mientras que Claudia pesa 50 kg y lleva una mochila de 5 kg. Él sube las escaleras hasta su departamento en 35 segundos; ella suele hacerlo en 25 segundos. ¿Quién de los dos realiza más trabajo? ¿Quién desarrolla mayor potencia?

VI. ¿Cuánto trabajo realizan Roberto y Claudia sobre sus mochilas, mientras caminan 200 m por una calle horizontal?

VII. Un tren del metro viaja a una velocidad de 20 m/s cuando frena intempestivamente y se detiene en 5 segundos. ¿Qué distancia recorre desde el momento en que aplica los frenos hasta que alcanza el reposo? Si los frenos desarrollan una potencia de 8 MW (megawatts: un megawatt equivale a un millón de watts), ¿qué fuerza ejercen sobre el tren al detenerlo?

VIII. Vuelve a la figura de la parte III de la actividad 20, que representa la fuerza que Manuel (secciones *Las tres leyes del movimiento de Newton* y *Newton en acción*) ejerce sobre el remolque al jalarlo. De acuerdo con la definición de trabajo, sólo la componente de la fuerza que actúa en la dirección del movimiento produce trabajo físico; si Manuel jala el remolque a lo largo de una distancia de 24 m, calcula la magnitud del trabajo que realiza.




No continúes avanzando mientras no tengas las respuestas a todas estas preguntas; consulta la opinión de tu experto de confianza si lo consideras necesario.

Estás a punto de terminar con esta unidad y también con el módulo. ¡Muy bien hecho!


Acabas de encontrarte con un nuevo concepto físico, que junto con la de fuerza y las leyes de Newton, será útil para resolver el problema sobre la longitud de la rampa de emergencia para automóviles sin frenos planteado al inicio de la unidad. Después de todo, la noción de trabajo tiene que ver con la distancia a lo largo de la cual actúa una fuerza sobre un cuerpo… lo cual debería ser importante en un problema que seguramente involucra fuerzas y distancias.

Por el momento, imagina que el coeficiente de fricción entre la superficie de la rampa y los neumáticos de un vehículo (de 50 toneladas de masa) que se desplaza sobre ella es de 0.3; luego emplea esa información para expresar el trabajo que realiza la fuerza de fricción sobre el automóvil, cuando actúa a lo largo de una distancia *d*. Recuerda emplear en el cálculo de la fricción las componentes en las que separaste el peso del vehículo, sobre una rampa que tiene una inclinación de 10º respecto a la horizontal.

Como siempre, incluye tus cálculos en tu portafolio del estudiante, y luego continúa avanzando.

## Energía

La palabra "energía" aparece últimamente en contextos muy diversos. Se habla de energía nuclear, energía eléctrica, energía química, incluso hay quienes hablan de una supuesta energía “psíquica” —cuya naturaleza nunca atinan a describir con precisión—. A nosotros en este momento nos interesa la llamada **energía mecánica**.

**En Física, se entiende por energía la capacidad que tiene un objeto para realizar trabajo.**

En ese sentido, efectivamente existen diversos tipos de energía: la energía eléctrica (como la que permite que el motor de un ventilador realice trabajo al mover las aspas), la energía química (como la almacenada en la gasolina, que al quemarse hace que el motor de un automóvil realice trabajo poniendo el auto en movimiento), la energía nuclear (como la de las centrales nucleoeléctricas, que mediante la **fisión del átomo** generan calor, que evapora el agua de un tanque, vapor que realiza trabajo al mover una turbina, la cual genera electricidad).

**glosario**

**Fisión nuclear:** la fisión nuclear es un proceso mediante el cual núcleo de un elemento pesado (por lo general, uranio o plutonio) se divide en dos núcleos más ligeros al ser bombardeado por partículas con la energía adecuada. La fisión nuclear libera grandes cantidades de energía, que pueden aprovecharse en muchas formas. Sin embargo, el manejo de los elementos necesarios es caro y riesgoso, pues se trata de materiales radioactivos peligrosos para la salud.

**Para saber más**

**Confundiendo la energía**

En tiempos recientes, se ha vuelto cada vez más común escuchar a personajes del mundo de lo “esotérico” hablar de “energía”. Aparentemente, se refieren a una especie de “energía espiritual” o “energía psíquica” que se encuentra dentro de todos nosotros.

No hay nada de malo en ello; sin embargo, en ocasiones este tipo de personas comienza a mezclar conceptos físicos en sus afirmaciones sobre la “energía” psíquica. Por ejemplo, llegan a afirmar que, como Einstein estableció que materia y energía son equivalentes, se tiene por consiguiente una prueba “científica” de la existencia del alma, pues al estar nuestros cuerpos hechos de materia, también están hechos de energía, y el alma sería precisamente esa energía.

El problema es que Einstein se refería a energía física, y no a algún otro tipo de energía. En Física, la energía es la capacidad de hacer trabajo. Si se pretende sacarlas de ese contexto, todas las afirmaciones de la física respecto a la energía dejan de ser válidas, y entonces no se puede decir —con bases científicas— que la materia sea equivalente a ninguna clase de “energía psíquica” ni “espiritual”.

Es importante evitar malos entendidos como este, que pueden llevar a confusiones lamentables entre los conceptos de la física y los pertenecientes a otras ramas de la cultura humana.

La energía mecánica, en particular, es la energía que un objeto adquiere como resultado de su velocidad o de su posición. Entraremos en detalles ahora mismo:

## *Energía cinética*

Un objeto que se mueve puede realizar trabajo: piensa por ejemplo en una cascarita de futbol. Chutas la pelota a la portería del equipo contrario y le pegas al tabique que señala el poste. ¿Qué ocurre?

El balón se desplaza a cierta velocidad, cuando encuentra en su camino un obstáculo (el tabique). Si llevaba la suficiente velocidad, seguramente la pelota moverá el tabique, lo que significa que le aplica una fuerza a lo largo de una distancia determinada (que puede ser muy corta si la pelota rebota de inmediato). Lo importante aquí es que la pelota realiza trabajo sobre el tabique.

Esto significa dos cosas:

- Un objeto en movimiento tiene la capacidad de realizar trabajo.
- Un objeto en movimiento tiene energía mecánica, por el sólo hecho de encontrarse en movimiento.

Esta clase de energía mecánica que poseen los objetos en movimiento se conoce como energía cinética (del griego kinesis, "movimiento"). La energía cinética $k$ de un objeto de masa $m$ que se mueve a una velocidad $v$ se expresa mediante la fórmula

$$k = \frac{1}{2}mv^2$$

*Energía cinética de un objeto de masa m, que se mueve a una velocidad v*

Las unidades del SI que se emplean para medir energía mecánica (y por lo tanto energía cinética) son los joules (J). Si en la fórmula anterior la masa se da en kilogramos y la velocidad en metros/segundo, la energía cinética quedará expresada en joules.

**25** Emplea la fórmula $k = \frac{1}{2}mv^2$ y los conocimientos de física que a estas alturas has desarrollado para responder:

I. Averigua cuál es la masa reglamentaria de un balón profesional de futbol lleno de aire. ¿Cuál es la energía cinética del balón si después de un chute viaja con una velocidad de 20 m/s?

II. ¿Desde qué altura deberías caer para alcanzar, al llegar al suelo, la misma energía cinética que tendrías si estuvieras corriendo a 7 m/s?

## Ejemplo

Consideremos el problema complementario, ¿qué energía cinética alcanza una persona que pesa 60 kg al llegar al suelo después de una caída de 3 m?

Para averiguarlo, necesitamos saber con qué velocidad se llega al suelo luego de una caída como esa. Puesto que la velocidad de un objeto que cae va aumentando con el tiempo debido a la aceleración de la gravedad, hace falta obtener primero el tiempo que dura dicha caída.

*(Continúa...)*

*(Continuación...)*

Ignorando la fricción del aire, la ecuación que describe la caída libre de un objeto desde una altura inicial de 3 m, con una velocidad inicial cero, es

$$d=-\frac{1}{2}(9.81)t^2+3$$

Hemos tomado negativa la dirección en la que actúa la gravedad, hacia abajo. En esta ecuación, *d* representa la posición (la altura) del objeto que cae, después de *t* segundos de caída. Al llegar al suelo, esta altura vale cero, así que tenemos

$$0=-\frac{1}{2}(9.81)t^2+3$$

Un rápido despeje nos lleva a

$$t=\sqrt{\frac{3(2)}{9.81}}=0.78\text{ s}$$

Lo cual significa que toma 0.78 segundos llegar al suelo al caer desde 3 m de altura. En otras palabras, la aceleración de la gravedad actuará durante esos 0.78 segundos. Recordando que la velocidad inicial es cero, la definición de aceleración (en la unidad 1, sección *El cambio del cambio*) permite escribir entonces

$$9.81=\frac{v_f-0}{0.78}$$

Al despejar la velocidad final tendremos

$$v_f = 9.81(0.78) = 7.65\text{ m/s}$$

Es decir, al caer desde una altura de 3 m con una velocidad inicial cero, se llega al suelo con una velocidad de 7.65 m/s. La energía cinética de una persona que pesa 60 kg al alcanzar esta velocidad será de $\frac{1}{2}(60)(7.65)^2 = 1\,755.67$ J

III. ¿Quién tiene más energía cinética, un automóvil de 1 000 kg que se desplaza a una velocidad de 10km/h, o un balón de futbol de 400 g que se mueve a 140 km/h?

IV. Investiga cuál es la masa del planeta Tierra y su distancia media al sol. Trabaja bajo el supuesto de que la órbita terrestre alrededor del sol es circular, y tomando en cuenta que nuestro planeta tarda un año en dar una vuelta completa al astro rey, determina su energía cinética.

V. Un automóvil en movimiento tiene cierta energía cinética. Luego aumenta su velocidad al doble. ¿Cuánto aumenta su energía cinética, en relación a la que tenía originalmente?

VI. Mientras estás de pie sobre la banqueta, ves pasar a un amigo sentado en un camión que viaja a cierta velocidad. Tiempo después hablas con tu amigo y le dices que cuando lo viste pasar, su energía cinética era grande, pues el camión iba bastante rápido. Pero él te dice que no es así, que su energía cinética era cero. ¿Por qué lo dice? ¿Quién de los dos tiene razón? ¿Depende la energía cinética del sistema de referencia desde el cual se realicen las mediciones?

Puedes darte cuenta de que tus conocimientos de física alcanzan para analizar una variedad de situaciones bastante grande. ¡Sigue adelante!


Por razones que abordaremos dentro de muy poco, la energía cinética de un automóvil sin frenos será una variable que se debe tomar en cuenta para determinar la longitud de una rampa de emergencia que permita detenerlo por completo en la situación planteada al inicio de la unidad. Si lo reflexionas, tiene sentido: la energía cinética del auto engloba tanto a su masa como a la velocidad con la que se mueve, dos parámetros que serán de interés en la solución del problema.

Calcula la energía cinética de un camión de carga cuya masa es de 50 toneladas, cuando alcanza una velocidad de 80 km/h. Agrega tus cálculos a tu portafolio del estudiante.

## *Energía potencial*

Un objeto que se mueve puede hacer trabajo, y por lo tanto tiene energía, que de acuerdo a la sección anterior, se denomina energía cinética. Pero un objeto en reposo también puede tener la capacidad de hacer trabajo, si las condiciones son apropiadas.

Imagina que tomas una pelota del suelo, la levantas hasta la altura de tus ojos y la mantienes ahí unos momentos. La pelota está en reposo, pero al haberla levantado, le conferiste la capacidad de hacer trabajo: en el momento en que la sueltes, adquirirá velocidad y por lo tanto energía cinética, lo que (como vimos en la sección anterior) significa que puede hacer trabajo.

Esta clase de energía, que está "almacenada" en un objeto como resultado de su posición y lista para convertirse en energía cinética, se llama **energía potencial** (pues tiene el "potencial" de hacer trabajo).

**La energía potencial de un objeto es la energía mecánica asociada a su posición o configuración. Es la energía almacenada en el objeto debido a su posición y que se puede transformar en energía cinética o trabajo.**

En el caso de la pelota que levantas del suelo, su energía potencial es igual al trabajo que hiciste sobre ella para llevarla hasta la altura de tus ojos.

La energía potencial de la pelota es debida a la presencia de la atracción gravitacional de la Tierra, así que también se le denomina **energía potencial gravitacional**.

Podemos obtener una expresión para la energía potencial gravitacional si consideramos que el trabajo que debe efectuarse sobre un objeto para llevarlo hasta una altura $h$ es

$$W = Fh$$

Si el objeto tiene una masa $m$, la fuerza necesaria para levantarlo del suelo es igual a su peso, $mg$ (donde $g$ es la aceleración de la gravedad), de modo que el trabajo anterior se puede escribir

$$W = mgh$$

Como la energía potencial es igual a este trabajo efectuado para llevar el objeto hasta la altura $h$, se puede escribir alternativamente

$$U = mgh$$

*Energía potencial de un objeto de masa m colocado a una altura h*

en donde $U$ representa a la energía potencial gravitacional.

Es importante que tomes en cuenta que la altura $h$ se mide respecto a un cierto nivel de referencia: en el caso de la pelota, este nivel de referencia es el suelo, pero también podría ser el quinto piso de un edificio (como sería el caso si tú y la pelota se encontraran en ese piso). Esto significa que la energía potencial, como la energía cinética, es relativa al sistema de referencia desde el cual se realicen las observaciones.


Emplea ahora la expresión $U = mgh$ y los conocimientos de física que a estas alturas has desarrollado para responder:

Mario trabaja transportando bloques de hielo. Uno de los bloques que debe manipular tiene una masa de 100 kg, y necesita subirlo a la caja de su camioneta, que está a 1 metro del suelo.

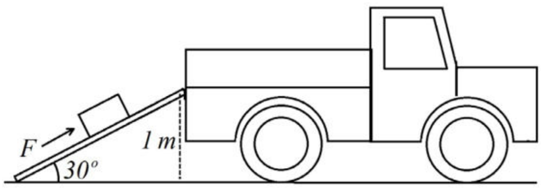



Figura 3.18

I. ¿Cuánta fuerza debe aplicar si lo levanta verticalmente?

II. ¿Y si lo lleva hasta la caja deslizándolo por una rampa (supón que la fricción con la rampa es tan pequeña que se le puede ignorar) como la que se muestra en la figura 3.18?

III. ¿Cuál es el trabajo que debe efectuar en cada caso?

IV. ¿Cuál será la energía potencial del bloque una vez que llegue a la caja de la camioneta?

Un elevador vacío tiene una masa de 700 kg. Está instalado en un edificio en el que cada piso tiene 3 m de alto. Calcula el incremento que sufre su energía potencial cuando va:

V. De la planta baja al quinto piso.

VI. Del quinto piso al segundo piso.

VII. Del segundo piso al séptimo piso.

VIII. Del séptimo piso a la planta baja.

**Ejemplo**

Si el elevador va del primer piso al tercero, su energía potencial inicial (respecto al suelo, encontrándose en el primer piso) es de $700(9.81)(3) = 20\,601$ J.

Su energía potencial final, al llegar al tercer piso (a 9 m de altura sobre el suelo) será de $700(9.81)(9) = 61\,803$ J.

Entonces su energía potencial experimenta un incremento de $61\,803 - 20\,601 = 41\,202$ J.

IX. Repite los cálculos si ahora el elevador lleva juntas a tres personas cuyas masas son 50 kg, 72 kg y 30 kg.

X. Subes hasta una cierta altura por unas escaleras, de modo que adquieres determinada energía potencial relativa al suelo. Si subieras al doble de altura, ¿qué tanta más energía potencial adquirirías?

XI. Imagina que en la pregunta anterior te acompaña un niño cuya masa es la mitad de la tuya. En cada uno de los dos casos planteados, ¿cuánta energía potencial adquiere el niño, en comparación a la que adquieres tú?

Continúa con la siguiente sección.

## Todo se va a alguna parte: trabajo y conservación de la energía

Para saber más

**La tragedia del Columbia**

En enero de 2003, el transbordador espacial Columbia se encontraba en órbita alrededor de nuestro planeta, cumpliendo la que sería su última misión. Durante el despegue, un pedazo de material de uno de los tanques de combustible se había desprendido y golpeado una de las alas de la nave, dañándola sin que en ese momento nadie percibiera que hubiera algún riesgo para la tripulación

Quince días después, el transbordador reingresó a la atmósfera de nuestro planeta; la velocidad que estos vehículos desarrollan durante dicha maniobra es tal, que la fricción con el aire calienta la superficie de la nave hasta temperaturas de 1400ºC. En condiciones normales, el recubrimiento térmico del vehículo impide que estalle en llamas bajo tal temperatura, pero el golpe sobre el ala que había ocurrido durante el despegue dañó este recubrimiento, con trágicas consecuencias: el transbordador no pudo soportar el calentamiento por fricción del aire, y se desintegró a los pocos momentos de haber iniciado las maniobras de reingreso. Los siete tripulantes murieron.

La fricción es un fenómeno muy real, tanto que puede llegar a ser peligroso.

Probablemente hayas escuchado una famosa frase según la cual, “la energía no se crea ni se destruye, sólo se transforma”. Se trata de una forma de expresar una importante ley física, la conservación de la energía. Básicamente, la idea principal está contenida en dicha frase: la energía nunca “desaparece”, ni tampoco “aparece” energía de la nada; todo lo que ocurre son transformaciones de una clase de energía en otra.

En el caso de la energía mecánica, la energía potencial de un objeto que se encuentra en una posición elevada se puede transformar en energía cinética (cuando el objeto se deja caer y comienza a moverse). Cuando llega al suelo, su energía cinética será igual a la energía potencial que tenía cuando estaba en la posición elevada: no se pierde ni se gana energía en ningún momento.

(En realidad, la fricción del aire hace que la energía cinética del objeto al llegar al suelo sea un poco menor que su energía potencial original, pero eso no significa que haya desaparecido algo de energía: la energía “perdida” se transforma en calor, pues la fricción del aire hace que el objeto se caliente. El calor es, desde luego, otra forma de energía.)

En la sección *Energía* habíamos definido a la energía como la capacidad de un objeto para hacer trabajo. La relación entre ambas cantidades va más allá:

En el caso de la energía potencial debería resultarte claro que así es: se afirmó en la sección *Energía potencial*, que la energía potencial es igual al trabajo efectuado para llevar un objeto hasta una altura $h$ respecto al suelo.

En el caso de la energía cinética ocurre algo similar: cuando se efectúa trabajo sobre un objeto, se le aplica una fuerza a lo largo de una distancia determinada. De acuerdo con la segunda ley de Newton, eso implica que el objeto sufre una aceleración, un cambio en su velocidad. Pero a su vez, eso significa que hay un cambio en su energía cinética; este cambio en la energía es igual al trabajo efectuado sobre el objeto.

Lo anterior suele expresarse escribiendo

$$W = \Delta k$$

donde $W$ es el trabajo realizado sobre un objeto, y $\Delta k$ representa el cambio en su energía cinética (la letra griega delta mayúscula, "Δ", suele emplearse para representar cambio).

El hecho de que el trabajo efectuado sobre un cuerpo sea igual al cambio en su energía cinética (y viceversa) constituye otra importante ley física, conocida como el teorema trabajo-energía.

**Teorema trabajo-energía**
El trabajo efectuado sobre un cuerpo es igual al cambio en su energía cinética, y viceversa.

Este teorema, y la ley de la conservación de la energía, resultan muy útiles a la hora de estudiar diversas situaciones en las que intervienen fuerzas que alteran el movimiento de un objeto. Y como estás a punto de ver, esas situaciones pueden ser muy variadas.

**28** Un automóvil de 800 kg viaja por una avenida a una velocidad de 100 km/h. Repentinamente el conductor aplica los frenos, momento en que los neumáticos dejan de girar. Sin embargo, la velocidad inicial del auto hace que todavía patine varios metros antes de detenerse por completo. Supón un coeficiente de fricción dinámica entre el asfalto y el caucho de los neumáticos de 0.8, ignora el calentamiento de las llantas debido a la fricción, y determina:

I. La energía cinética del auto justo antes de frenar.

II. El trabajo que debe hacer la fricción sobre el auto para detenerlo por completo

III. La distancia que el auto patina desde el momento en que las llantas dejan de girar hasta que se detiene por completo.

IV. La aceleración que el auto experimentará desde el momento en que frena hasta que se detiene por completo.

V. Se te pidió al inicio que ignoraras el calentamiento de las llantas por fricción. En la vida real, ese calentamiento puede llegar a ser importante. ¿Cuál es su efecto sobre la distancia que el auto recorre antes de detenerse? En la vida real, ¿se recorrería más o menos distancia de la que calculaste ignorando el calentamiento?

VI. Un automóvil similar al anterior, cuya masa es también de 800 kg, se ve involucrado en un accidente vial cuando viajaba sobre pavimento, cuyo coeficiente de fricción dinámica con el caucho de los neumáticos es igualmente de 0.8. Los peritos que llegan al lugar necesitan determinar si el conductor estaba excediendo el límite de velocidad de 80 km/h en el momento de frenar. Para ello, notan que los neumáticos del auto dejaron marcas rectas sobre el pavimento que tienen 20 m de longitud. Ayúdales a determinar si el conductor debe pagar una infracción por conducir con exceso de velocidad. Ignora el calentamiento de los neumáticos por fricción (¿qué efecto tendría ese calentamiento en tu resultado final?).

VII. Cuando un carrito de montaña rusa sube (con ayuda de un motor) la primera cresta de la montaña, están ganando energía potencial, que luego se convertirá en energía cinética cuando el carrito comience a descender. La ley de la conservación de la energía nos dice que al llegar al punto más bajo, su energía cinética será igual a la energía potencial que tenía en la parte más alta. Esa energía cinética será la responsable de hacer que el carro suba la siguiente cresta. Tiempo después de leer esto, te encuentras con dos amigos que discuten el diseño de una montaña rusa. Uno argumenta que cada cumbre de la montaña debe ser más baja que la anterior. El otro no está de acuerdo, y dice que mientras la primera sea la más alta de todas, no importa cómo se distribuyan las alturas de las demás. ¿Qué les dirías tú?

VIII. Calcula la energía potencial que adquiere un carrito de una montaña rusa en un parque de diversiones en la Ciudad de México. En su primera cresta, la montaña alcanza una altura de 64 m sobre su punto más bajo. El carrito tiene una masa de 500 kg, sin ocupantes. Determina también la velocidad con la que el carrito (sin ocupantes) llega al punto más bajo después de caer de la primera cumbre.

## Ejemplo

Imagina un objeto cuya masa sea de 100 kg, el cual es llevado a 25 m de altura. Su energía potencial en esa posición es de $U = 100(9.81)(25) = 24\ 525$ J . Si se le deja caer, al llegar al suelo su energía potencial será cero, pero no habrá desaparecido: en realidad, se habrá transformado por completo en energía cinética.

Eso quiere decir que justo antes de tocar el suelo, su energía cinética será también de 24 525 J, lo que permite escribir

$$\frac{1}{2}mv^2 = 24\ 525$$

donde *m* es la masa del objeto y *v* su velocidad en el instante antes de tocar el suelo. Como conocemos su masa, podemos despejar dicha velocidad:

$$\frac{1}{2}(100)v^2 = 24\ 525$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(24\ 525)}{100}} = 22.15 \text{ m/s}$$

Entonces, al llegar al suelo el objeto lo hará a una velocidad de 22.15 m/s.

## Ejemplo

Imaginemos ahora que el mismo objeto comienza su caída con una velocidad inicial de 10 m/s (quizás porque recibe un empujón hacia abajo al empezar a caer). Al mismo tiempo, un agente externo comienza a ejercer sobre él una fuerza hacia arriba, la cual lo va frenando a lo largo de todo el trayecto, de modo que al llegar al suelo, su velocidad es exactamente cero. Gracias al teorema trabajo-energía podemos calcular la magnitud de esta fuerza.

Dicho teorema establece que el trabajo realizado sobre un objeto es igual al cambio en su energía cinética. En este caso, hay que tomar en cuenta que sobre el objeto actúan dos fuerzas: su peso, que lo jala hacia abajo por efecto de la aceleración de la gravedad, y la fuerza con la que el agente externo va frenando su caída. El trabajo neto realizado sobre el objeto será la suma de los trabajos efectuados por cada una de estas fuerzas.

Llamemos $W_F$ al trabajo efectuado por la fuerza de frenado, y $W_g$ al realizado por el peso del objeto. Entonces el trabajo neto $W$ a lo largo de los 25 m de caída será

$$W = W_g - W_F = 100(9.81)(25) - 25F = 24\ 525 - 25F$$

(Continúa...)

*(Continuación...)*

Hay que recordar que $W_F$ se opone al movimiento de caída del objeto, y por lo tanto es negativo. Además, hemos llamado $F$ a la fuerza de frenado. Ahora bien, este trabajo neto será igual al cambio en la energía cinética del objeto. Como la caída comenzó con una velocidad de 10 m/s, la energía cinética inicial era de

$$\frac{1}{2}(100)(10)^2 = 5\,000 \text{ J}$$

Como queremos que el objeto llegue al suelo con velocidad cero, su energía cinética final deberá ser también cero. Entonces, el cambio en la energía cinética es simplemente de −5 000 J (negativo, pues será una disminución de energía cinética). Por el teorema trabajo-energía, escribimos entonces

$$24\,525 - 25F = -5\,000$$

de donde resulta

$$F = \frac{-24\,525 - 5\,000}{25} = 1\,181 \text{ N}$$

Así que la fuerza necesaria para que el objeto llegue al suelo con una velocidad de exactamente cero metros sobre segundo, es 1181 N.

IX. Realiza los cálculos anteriores para el carrito lleno a su máxima capacidad de 36 personas, suponiendo un peso promedio de 60 kg por persona. ¿Qué sucede ahora con la energía potencial del carrito? ¿y con la velocidad que alcanza en el punto más bajo?

X. ¿Recuerdas el tiro vertical que se estudió en la primera unidad? De acuerdo con lo que has estudiado desde entonces, ¿en qué punto(s) de su trayectoria un objeto en tiro vertical alcanza su máxima energía potencial? ¿y en qué punto(s) alcanza su máxima energía cinética?

XI. Realiza un análisis similar al anterior para responder las mismas dos preguntas, pero en el caso de un objeto que se encuentra en movimiento armónico simple, como el peso de un péndulo.

XII. Manuel (secciones *Las tres leyes del movimiento de Newton*, *Newton en acción* y *Trabajo*) va jalando su remolque. De acuerdo con la tercera ley de Newton, el remolque ejerce sobre Manuel una fuerza igual y opuesta a la que él ejerce sobre dicho objeto; ¿significa eso que el trabajo efectuado por este chico sobre su remolque se iguala a cero? ¿Por qué?

Una pelota de esponja y una de boliche se mueven de manera que sus energías cinéticas son iguales.

XIII. ¿Alguna de las dos va más rápido? De ser así, ¿cuál?

XIV. ¿Alguna de las dos requiere mayor trabajo para ser detenida? De ser así, ¿cuál?

Miguel empuja una caja ejerciendo una fuerza de 20 N a lo largo de 6 m. Canek hace lo mismo con una caja idéntica, pero ejerciendo una fuerza de 10 N a lo largo de 12 m.

XV. ¿Quién realiza más trabajo?

XVI. ¿Quién comunica más energía cinética a su caja?


Así que, de acuerdo con el teorema trabajo-energía, la energía cinética de un objeto es igual al trabajo necesario para llevarlo desde el reposo hasta esa velocidad, o para lograr el proceso inverso: detenerlo por completo. Este hecho es clave para resolver, finalmente, el problema planteado al principio de la unidad.

Suponiendo una rampa inclinada 10° respecto a la dirección horizontal, ¿cuáles son las dos fuerzas que realizan trabajo sobre un vehículo que entra a la rampa? ¿Cuál sería entonces la fuerza neta que realiza trabajo sobre él?

En tu portafolio del estudiante tienes ya la energía cinética de un vehículo de ciertas características que llega a la rampa. De acuerdo con el teorema trabajo-energía, ¿qué relación hay entre esa energía y el trabajo que deberá efectuar la fuerza neta sobre el vehículo para detenerlo por completo?

Tienes listas todas las piezas del rompecabezas, pasa a la siguiente sección y resuélvelo.

CIERRE

## Construyendo la rampa de emergencia

Vuelve a la situación planteada al inicio de esta unidad, en la sección *La rampa de emergencia*.

Considera que la masa de un automóvil compacto es de alrededor de una tonelada (t), mientras que la de un camión de carga lleno a su máxima capacidad es de 50 t.

La superficie de la rampa estará enteramente cubierta de grava suelta, la cual ofrece un coeficiente de fricción con los neumáticos de 0.30.

El terreno sobre el cual se va a realizar la construcción es tal que la rampa formará un ángulo de 10º sobre la dirección horizontal, lo cual ayudará a que los vehículos frenen más pronto al entrar en ella.

El límite de velocidad en la zona donde realizará el trabajo es de 80 km/h.

I. ¿Cuál es la longitud mínima que deberá tener la rampa para que los vehículos que entren en ella, desde automóviles compactos hasta camiones de carga, se detengan completamente?

II. ¿Cuál sería esa longitud mínima si la rampa se fuera a construir sin ninguna pendiente?

Usa la siguiente lista de cotejo para verificar que estés siguiendo todos los elementos necesarios para solucionar el problema:

| Elementos de la solución | Sí | No |
|---|---|---|
| Expresaste todas las cantidades involucradas usando el mismo sistema de unidades (es decir, las expresaste todas usando kilogramos-metros-segundos, o todas usando kilogramos-kilómetros-horas). | | |
| Empleaste los parámetros correctos (velocidad máxima permitida, peso máximo de un vehículo que llegue a la rampa) necesarios para determinar la longitud mínima de la rampa. | | |
| Determinaste la energía cinética de un vehículo que llega a la rampa de emergencia a la velocidad máxima permitida. | | |
| En el caso de que la rampa se construya con pendiente, descompusiste el peso del vehículo en dos componentes, una paralela a la superficie de la rampa y la otra perpendicular a ella. | | |
| Determinaste el valor de la fuerza de fricción que se opone al movimiento del vehículo al entrar a la rampa. | | |

| Elementos de la solución | Sí | No |
|---|---|---|
| En el caso de que la rampa se construya con pendiente, determinaste la otra fuerza que, junto con la fricción, se opone al movimiento del vehículo al entrar a la rampa. | | |
| Expresaste correctamente el trabajo que realizan sobre el vehículo las fuerzas que se oponen a su movimiento. | | |
| Empleaste el teorema trabajo-energía para escribir una ecuación que relaciona la energía cinética del vehículo con las fuerzas que se oponen a su movimiento. | | |
| Determinaste la distancia a lo largo de la cual deben actuar estas fuerzas para lograr detener el vehículo, en caso de que la rampa se construya con pendiente. | | |
| Determinaste la distancia a lo largo de la cual deben actuar estas fuerzas para lograr detener el vehículo, en caso de que la rampa se construya sin pendiente. | | |

Cuando termines de responder, te darás cuenta de que las leyes de Newton y los conceptos de trabajo y energía son muy valiosos en muchas situaciones. Avanza ahora a la siguiente (¡y última!) sección.

Como un ejercicio de autoevaluación sobre los conocimientos que acabas de estudiar, te proponemos que elabores un mapa conceptual en el que colocarás los conceptos que sean centrales en esta tercera unidad: masa, peso, fuerza, trabajo, energía, energía cinética, energía potencial (¿se te ocurren otros?). Recuerda relacionarlos de tantas maneras como te sea posible, y procura incluir situaciones que observes en la vida real (puedes tomar como ejemplos los mapas conceptuales que completaste en las secciones *Ecuación del movimiento uniformemente acelerado* y *Recapitulación*).

De manera similar a lo que has realizado en las dos unidades anteriores, reflexiona detenidamente respecto a lo recién estudiado, y plantea una situación problemática que observes en tu entorno y que involucre esos conceptos (tal vez algo como ¿qué fuerza se necesita para mantener en movimiento rectilíneo uniforme a un automóvil que viaja sobre un camino luchando contra una fuerza de fricción determinada? o ¿cuánta energía mecánica empleas al realizar una serie de 20 lagartijas?)

## El final

Has recorrido un largo camino para llegar hasta este punto. Has aprendido mucho y eso es lo más importante.

Elabora un último mapa conceptual; esta vez, el mapa versará sobre los conceptos que a tu consideración sean los más fundamentales a lo largo de todo este módulo. Entre ellos seguramente incluirás:

- Movimiento rectilíneo uniforme
- Movimiento rectilíneo acelerado
- Velocidad
- Rapidez

- Aceleración
- Vector
- Ecuaciones lineales
- Funciones lineales
- Ecuaciones cuadráticas
- Funciones cuadráticas
- Movimiento circular
- Rapidez angular
- Aceleración angular
- Razones trigonométricas
- Funciones trigonométricas
- Fase
- Periodo
- Amplitud
- Movimiento armónico simple
- Fuerza
- Trabajo
- Energía

¿Qué otros conceptos piensas incluir?

Puedes elaborar los mapas con lápiz y papel, o puedes dirigirte a alguna de las siguientes páginas de Internet, en donde existen herramientas de uso fácil, para crear mapas conceptuales:

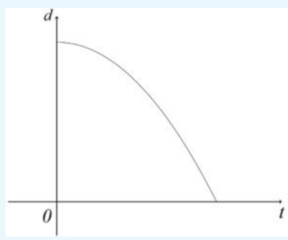
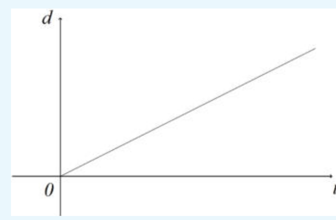
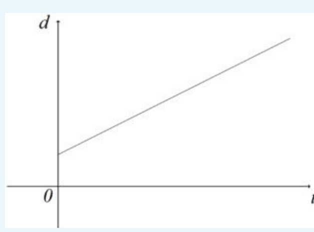
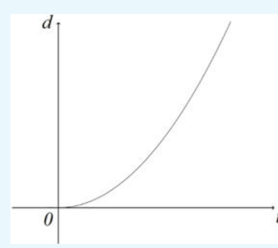
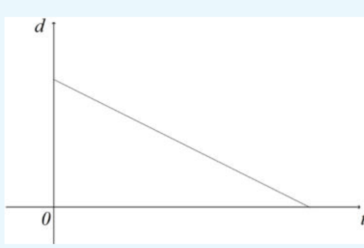
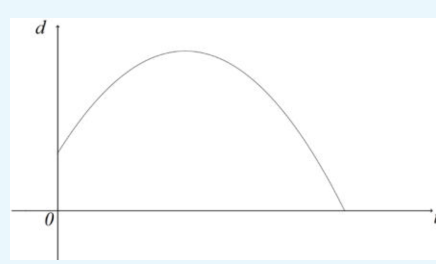
- http://www.gliffy. com/
- http://cmap.ihmc.us/download/
- https://bubbl.us/

Felicidades, lo has hecho estupendamente bien. Prepárate ahora para responder ¿Ya estoy preparado(a)?

# ¿Ya estoy preparado(a)?

Lee detenidamente y realiza todo lo que se pide. Explica con tanto detalle como te sea posible todos los razonamientos y procedimientos que emplees.

1. Las siguientes son las gráficas *t*iempo-distancia para diferentes objetos móviles. Determina cuáles corresponden a movimientos rectilíneos uniformes, y cuáles a movimientos rectilíneos acelerados. En el último caso, especifica también si la velocidad del móvil se incrementa o disminuye.

| Gráfica A | Gráfica B |
|---|---|
|  |  |
| | |
| Gráfica C | Gráfica D |
|  |  |
| | |
| Gráfica E | Gráfica F |
|  |  |
| | |

2. Refiérete a las gráficas de la pregunta anterior, y asocia las ecuaciones de la izquierda con una gráfica que pueda corresponderles. Es posible que no todas las ecuaciones tengan una gráfica que les corresponda, o viceversa.

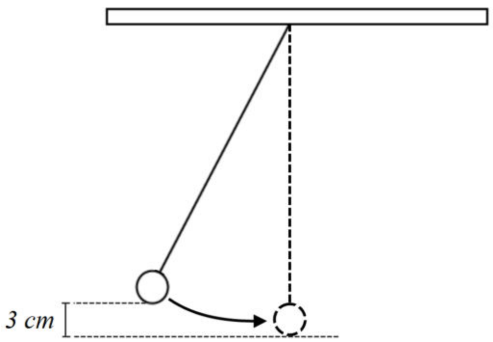
| | | | |
|---|---|---|---|
| I) | $d = 4t$ | | |
| II) | $d = 5t^2 + 10t + 23$ | a) | Gráfica A |
| III) | $d = -4t^2 + 8t + 3$ | b) | Gráfica B |
| IV) | $d = -5t + 10$ | c) | Gráfica C |
| V) | $d = 10t + 6$ | d) | Gráfica D |
| VI) | $d = t^3 - 8t^2$ | e) | Gráfica E |
| VII) | $d = -4t^2 + 20$ | f) | Gráfica F |
| VIII) | $d = 7t^2$ | | |

Con base en tu elección, determina (considera que en todos los casos, las distancias y tiempos se están midiendo en metros y segundos, respectivamente):

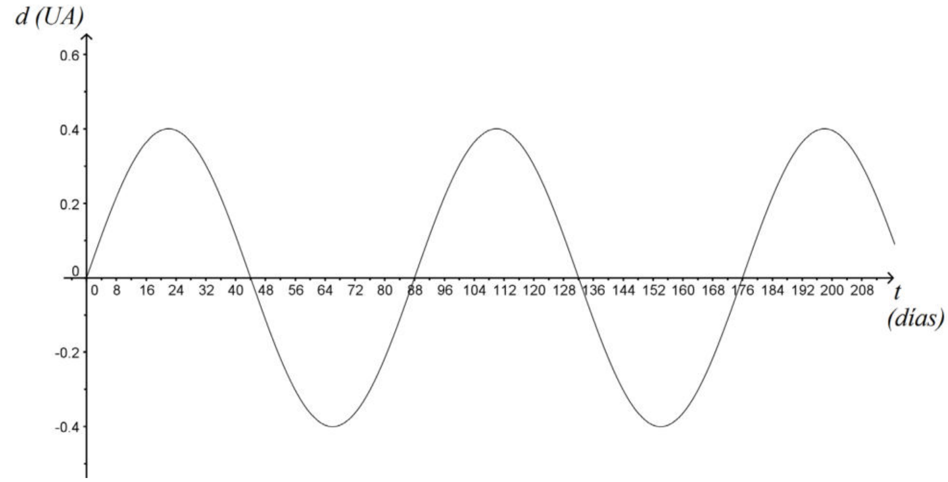
a) La velocidad inicial del objeto móvil en la gráfica F.
b) El tiempo en que ese objeto alcanza su altura máxima.
c) La aceleración del objeto móvil en la gráfica D.
d) La distancia que ese objeto había recorrido a los 5 segundos de movimiento.
e) La velocidad del objeto de la gráfica C.
f) El tiempo en que ese objeto llega a la posición $d = 30$ metros.
g) El tiempo en que el objeto de la gráfica E llega a la posición $d = 0$ metros.
h) La posición de ese mismo objeto a los 0.5 segundos de movimiento.
i) La posición inicial del objeto en la gráfica A.
j) El tiempo en que ese mismo objeto llega a la posición $d = 10$ metros.
k) El tiempo en que el objeto de la gráfica B recorre 20 metros de distancia.
l) La aceleración de ese último objeto.

3. El péndulo de la figura oscila con un periodo de 2 segundos. Ignorando los efectos de la fricción y suponiendo que el movimiento comenzó en $t = 0$ cuando la masa estaba en la posición dibujada con líneas sólidas, escribe una ecuación que describa la altura del péndulo como función del tiempo, medida desde su posición más baja (péndulo en líneas punteadas). Además, obtén

a) La frecuencia de este movimiento.
b) Su amplitud.
c) Dibuja la gráfica de esta función, incluyendo al menos dos ciclos.



4. Desde un observatorio astronómico, un equipo científico realiza observaciones del planeta Mercurio en su órbita alrededor del Sol. Las observaciones resultan en la gráfica siguiente, que muestra la distancia de dicho planeta al Sol en Unidades Astronómicas (UA; una UA es equivalente a la distancia media de la Tierra al Sol, aproximadamente 150 millones de kilómetros).




Con base en la gráfica, obtén

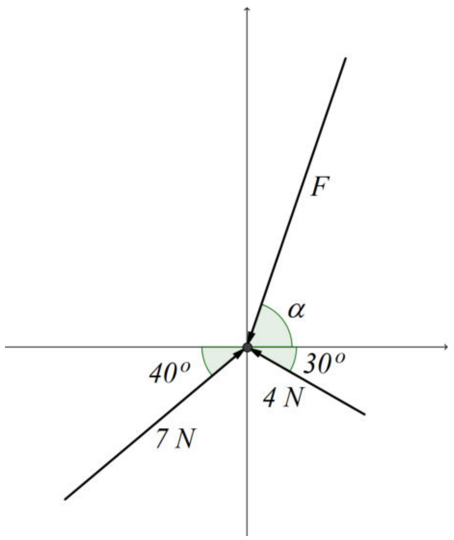
a) El periodo de traslación de Mercurio alrededor del Sol.
b) El radio de la órbita de Mercurio alrededor del Sol, en UA y en kilómetros.
c) La ecuación que describe la distancia de Mercurio al Sol como función del tiempo.
d) La velocidad tangencial de este planeta en su órbita alrededor del astro rey, en km/h.

5. El *quarterback* de un equipo de futbol americano lanza el balón (cuya masa es de 400 gr) con una velocidad inicial de 18 m/s y un ángulo de 50º respecto a la dirección horizontal. Debido a la fricción del aire, el balón cae al suelo 0.5 metros antes de lo que habría alcanzado en ausencia de fricción. Con base en ello y suponiendo que la fricción es constante y que actúa sólo en la dirección horizontal, determina

a) La aceleración que la fricción del aire imparte al balón.
b) El trabajo realizado por dicha fricción sobre el balón.
c) La energía cinética que el balón pierde debido a esta fricción.

6. Tres personas están empujando una pesa de 2 kg de masa. Dos de ellas lo hacen con fuerzas cuyas magnitudes y direcciones se observan en la figura, en la que se aprecia una vista superior de la situación. ¿Cuál debe ser la magnitud $F$

y la dirección $\alpha$ de la fuerza que aplica la tercera persona, para que la masa se mueva con una aceleración de 1 m/s$^2$, en dirección vertical hacia abajo?




7. En la película *Superman Returns*, el super héroe debe salvar un avión que cae en picada. Considera una masa de 350 000 kg para el avión, y que la caída comenzó a 20 km de altura. Ignora el efecto de la fricción del aire.

   a) ¿Cuál es la energía potencial de la nave en el momento en que comienza a caer?
   b) Superman alcanza al avión cuando está a 300 metros del suelo. ¿Qué cantidad de trabajo debe realizar para detenerlo justo antes de que toque tierra?
   c) ¿Qué fuerza deberá aplicar para lograr tal hazaña?
   d) Determina la aceleración que sufrirá el avión como resultado de dicha fuerza.

# Apéndice 1

## Clave de respuestas

¿Estás leyendo esto antes de haber intentado encontrar las respuestas por tu cuenta? No es una buena idea. Aquí encontrarás las respuestas correctas, pero sin el trabajo intelectual que significa poner tu mejor esfuerzo para resolver los problemas, no lograrás aprender las habilidades que necesitas para aprobar el módulo.

Si primero encontraste tus propias respuestas y ahora vienes a verificarlas, ¡adelante!

## ¿Con qué saberes cuento?

1. En el primer caso, una ecuación puede ser $\frac{4x+6}{2}+x-2=10$. No es la única posibilidad. Al resolver la ecuación encontrarás que el número pensado es 3.

   En el segundo caso, el teorema de Pitágoras y el hecho de que los lados del cuadrado son iguales te llevarán a concluir que la diagonal del cuadrado mide $\sqrt{200}$ cm.
2. Las parejas que son directamente proporcionales son:

   2.1 Radio de una circunferencia / Longitud de la circunferencia
   2.5 Diámetro de una circunferencia / Radio de la circunferencia
   2.6 Altura de una caja de base fija / Volumen de la caja

   Las que son inversamente proporcionales son:

   2.2 Número de trabajadores en una obra / Tiempo en que la obra quedará completa
   2.4 Flujo de agua en un grifo / Tiempo que el grifo tarda en llenar una pileta

   La pareja "Radio de una circunferencia / Área encerrada por la circunferencia" no es ni directa ni inversamente proporcional.

   Si no logras explicar por qué cada pareja está en el caso que le corresponde, no deberías comenzar a trabajar aún con este módulo. Si ese fuera el caso, te sugerimos que dediques un tiempo a estudiar los conceptos de ecuación lineal y proporcionalidad; es importante que seas capaz de resolver una ecuación lineal dada, y que sepas reconocer parejas de variables que son directamente proporcionales. El libro de Samuel Fuenlabrada (Fuenlabrada, *Aritmética y Álgebra*, México: McGraw-Hill, 2007), así como el estudio del módulo Representaciones simbólicas y algoritmos, puede servirte de apoyo.

## Unidad 1

### Actividad 1

Las dos variables son la **distancia** que va recorriendo y el **tiempo** que va pasando.

## Actividad 2

I. La rapidez se calcula dividiendo distancia recorrida entre tiempo empleado para recorrerla. De la tienda de Doña Esperanza a la casa de "El Chato" hay 320 metros, y Don Martín tardó 4 minutos en cubrir esa distancia. Eso significa que su rapidez es $\frac{320 \text{ metros}}{4 \text{ minutos}} = 80 \text{ m/min}$.

II. Si realizas los cálculos, encontrarás que la rapidez no se modifica: 80 metros/minuto

III. 80 m/min

IV. 80 m/min

V. Constante

## Actividad 3

Midiendo la distancia en pulgadas y el tiempo en segundos se obtendría una rapidez en unidades de pulgadas/segundo.

## Actividad 5

I. El resultado dependerá de tu estatura. Sigue la idea que se presenta en el ejemplo.

II. La rapidez de Don Martín estaba en unidades de metros/minuto. Para convertirla en yardas/segundo necesitas saber que 1 metro equivale a 1.094 yardas y que un minuto equivale a 60 segundos. Empleando la idea del ejemplo (dos veces, una para convertir los metros en yardas y otra para convertir los minutos en segundos), queda

$$80\frac{\text{metros}}{\text{minuto}}\ \frac{1.094 \text{ yardas}}{1 \text{ metro}}\ \frac{1 \text{ minuto}}{60 \text{ segundos}} = 1.46 \text{ yardas/segundo.}$$

III. De nuevo, el resultado dependerá de los valores que obtengas en tus mediciones. Sigue la idea del ejemplo y del ejercicio (II).

IV. Necesitas convertir la rapidez del automóvil de kilómetros por hora a metros por minuto. Empleando las ideas anteriores, tendrás

$$100\frac{\text{kilometros}}{\text{hora}}\ \frac{1\,000 \text{ metros}}{1 \text{ kilometro}}\ \frac{1 \text{ hora}}{3\,600 \text{ segundos}} = 27.78 \text{ metros/segundo}.$$

Así que el auto recorre cerca de 1667 metros cada minuto.

## Actividad 6

200 km/h equivalen aproximadamente a 55.55 m/s: al realizar la conversión, se tiene $200\frac{\text{kilómetros}}{\text{hora}}\ \frac{1\,000 \text{ metros}}{1 \text{ kilómetro}}\ \frac{1 \text{ hora}}{3\,600 \text{ segundos}} = 55.55\frac{\text{metros}}{\text{segundo}}$.

## Actividad 7

I. Para responder, observa bien la figura; sólo uno de los objetos se está moviendo en línea recta, y sin cambiar su velocidad.

## Actividad 8

Sólo reflexiónalo un momento y mira la figura 1.1. A las 7:11 Don Martín ya había recorrido 80 metros del tramo recto. Como tarda un minuto en recorrer 80 metros, eso significa que entró en ese tramo a las 7:10.

## Actividad 9

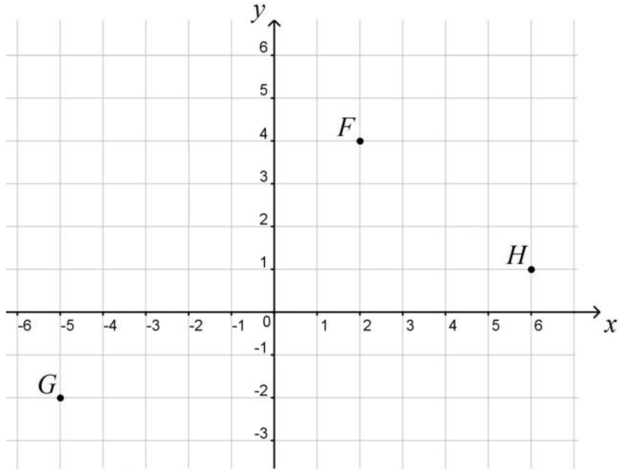
Aquí está la tabla completa:

| Tiempo transcurrido ($t$) (minutos) | Distancia recorrida por Don Martín en el tramo recto ($d$) (metros) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 80 |
| 5 | 400 |
| 7 | 560 |
| 9 | 720 |
| 13 | 1040 |
| 15 | 1200 |

## Actividad 10

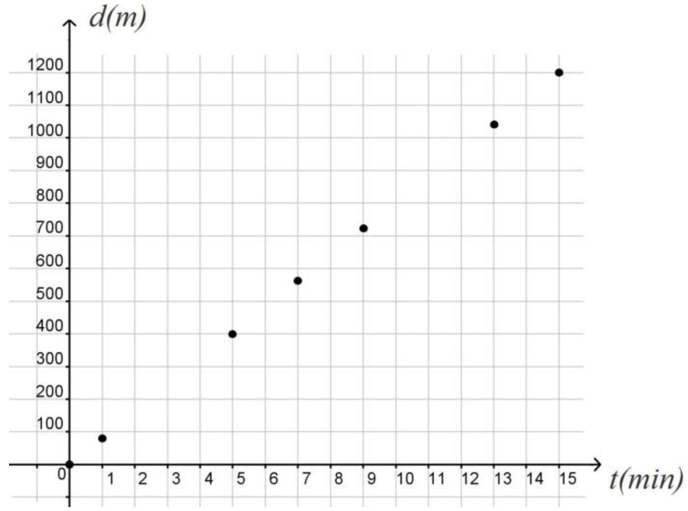
I. Las coordenadas de los puntos son: B(–2,3), C(–3,–3), D(4,–1), E(5,2)

II. Aquí está el plano con los puntos solicitados:



## Actividad 11

I. Este es el plano tiempo-distancia con los puntos de la tabla ya graficados:




II. Los puntos de la gráfica anterior se ajustan a una recta, de manera que sí se trata de una función lineal.

## Actividad 12

Analiza con cuidado los valores de la tabla. La ecuación es $d = 80t$.

## Actividad 13

I. Empleando la ecuación anterior, se obtiene $d = 80\text{m/min}(11 \text{ min}) = 880$ metros.

II. De modo similar, $d = 80\dfrac{\text{m}}{\text{min}}(14 \text{ min}) = 1\,120$ metros.

III. De nuevo se emplea la ecuación, sustituyendo el valor de la distancia recorrida se obtiene

$$160 \text{ m} = 80\frac{\text{m}}{\text{min}}t$$

De manera que al despejar $t$, se tiene

$$\frac{160 \text{ m}}{80 \text{ m/min}} = t$$

lo cual significa que $t = 2$ minutos.

**En adelante, omitiremos las unidades dentro de las ecuaciones y sólo las incluiremos en los resultados finales.**

IV. De modo similar, la ecuación dará

$$640 = 80t$$

y al despejar $t$ se tendrá

$$\frac{640}{80} = t$$

Es decir, $t = 8$ minutos.

## Actividad 14

$d = 200t$ , si estás midiendo el tiempo en horas y la distancia en kilómetros.

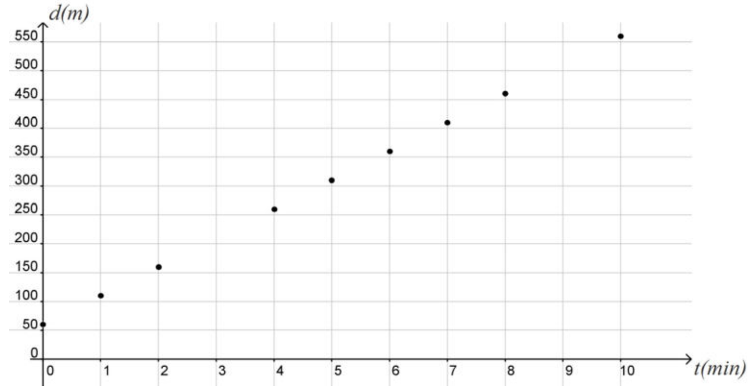
## Actividad 16

Aquí está la tabla completa:

| Tiempo ($t$) (min) | Distancia ($d$) (m) |
|---|---|
| 0 | 60 |
| 1 | 110 |
| 2 | 160 |
| 4 | 260 |
| 5 | 310 |
| 6 | 360 |
| 7 | 410 |
| 8 | 460 |
| 10 | 560 |

## Actividad 17

I. Puede que la tabla no muestre proporcionalidad a primera vista, pero los puntos de la gráfica se ajustan a una recta:



y Citlalli no cambia de velocidad en todo su camino, por lo que su movimiento sí es rectilíneo uniforme.

II. Analiza cuidadosamente los datos de la tabla, y piensa sobre todo en cómo es que se fueron obteniendo los que faltaban. La ecuación es $d = 50t + 60$.

## Actividad 18

Lee con mucha atención el ejemplo que se plantea. Si ahora haces los cálculos, verás que todas las razones "incremento en distancia" / "incremento en tiempo" son iguales, y valen 50 m/min (que además es el valor de la rapidez de Citlalli). Así que la proporcionalidad sí se mantiene, sólo que hubo que buscarla en los incrementos de las variables, no en las variables mismas.

## Actividad 19

I. Mira la gráfica. Su ordenada al origen vale 560 (que es la distancia que separaba a Citlalli de Pablo cuando comienza su movimiento de regreso, es decir, cuando $t = 0$).

II. Siguiendo la sugerencia, la ecuación resulta ser $d = -30t + 560$.

III. Lee el ejemplo con atención. Para que Citlalli llegue a casa de Pablo, la distancia que los separa debe de ser cero. Esto en la ecuación significa

$$0 = -30t + 560$$

y al despejar $t$ se tiene

$$t = \frac{-560}{-30} = 18.67 \text{ minutos}$$

Si miras la gráfica, verás que la recta toca al eje $t$ en ese valor.

IV. Si Citlalli está a 100 metros de casa de Pablo, entonces la ecuación se convierte en

$$100 = -30t + 560$$

y al despejar $t$ se tiene

$$t = \frac{100 - 560}{-30} = 15.33 \text{ minutos.}$$

V. Si Citlalli lleva 11 minutos de camino, al sustituir este valor de $t$ en la ecuación se obtendrá

$$d = -30(11) + 560 = 230 \text{ metros.}$$

## Actividad 20

I. Se puede considerar que el frente de las ondas siguen un movimiento rectilíneo uniforme hacia la estación del servicio sismológico.

Colocando el origen del sistema de referencia en la estación del servicio sismológico, midiendo el tiempo en segundos y la distancia en kilómetros, , la ecuación para el movimiento rectilíneo uniforme

$$d = vt + d_0$$

se convierte en

$$d = 8t + 203$$

que es la que estábamos buscando.

II. Para que las ondas se encuentren a 50 km de la estación, debe transcurrir un tiempo $t$ que se determina sustituyendo $d = 50$ en la ecuación, de la siguiente manera:

$$50 = -8t + 203$$
$$50 - 203 = -8t$$
$$\frac{-153}{-8} = t$$
$$19.125 = t$$

III. Para calcular el tiempo en que las ondas alcancen la estación, sustituimos $d = 0$ en la ecuación (pues en ese momento, dichas ondas se encontrarán a cero kilómetros de la estación). Se tiene

$$0 = -8t + 203$$
$$-203 = -8t$$
$$\frac{-253}{-8} = t$$
$$25.375 \text{ s} = t$$

Lo cual significa que deberán transcurrir 25.375 segundos para que las ondas sísmicas alcancen la estación.

IV. 10 segundos después de haberse originado, las ondas están a una distancia de la estación que se determina sustituyendo $t = 10$ s en la ecuación:

$$d = -8(10) + 203$$
$$d = -80 + 203$$
$$d = 123$$

## Actividad 21

I. Sustituimos $d = 100$ en la ecuación:

$$100 = 70t + 10$$
$$100 - 10 = 70t$$

$$\frac{90}{70} = t$$
$$1.29 = t$$

Así que tiene que transcurrir casi hora y media para que el tren esté a 100 km de distancia.

II. Ahora sustituimos $d = 150$ km:

$$150 = 70t + 10$$
$$150 - 10 = 70t$$
$$\frac{140}{70} = t$$
$$2 = t$$

El tren estará a 150 km de distancia después de dos horas.

III. Sustituimos en la ecuación $t = 5$:

$$d = 70(5) + 10$$
$$d = 350 + 10$$
$$d = 360$$

Así que una vez pasadas 5 horas, el tren estará a 360 km.

## Actividad 22

I. Porque los objetos móviles recorrían distancias iguales en tiempos iguales, y la pendiente era constante, las gráficas eran rectas. En este caso, la pendiente no es constante (la gráfica se hace cada vez más "inclinada", más vertical), lo cual es señal de que no se están recorriendo distancias iguales en tiempos iguales.
II. Debería recorrer distancias iguales en tiempos iguales; en otras palabras, su velocidad debería ser constante.
III. La gran diferencia es que en los movimientos estudiados anteriormente, la velocidad era constante, y ahora no lo es.
IV. Tus observaciones deberían ser parecidas a las siguientes:

| | Movimiento rectilíneo uniforme | Nuevo tipo de movimiento |
|---|---|---|
| Gráficas tiempo-distancia | Rectas | Curvas |
| Tablas tiempo-distancia | Incrementos proporcionales | Los incrementos no son proporcionales. |
| Ecuaciones tiempo-distancia | Lineales | Cuadráticas |
| Rapidez | Constante | No constante |

## Actividad 23

Recuerda que la rapidez se calcula dividiendo "distancia recorrida" entre "tiempo empleado para recorrerla". Entonces, Al ir de A a B, la rapidez es de $\frac{1\text{ m}}{1\text{ s}} = 1\text{ m/s}$.

Al ir de B a C, la rapidez es de $\frac{3\text{ m}}{1\text{ s}} = 3\text{ m/s}$.

Al ir de C a D, la rapidez es de $\frac{5\text{ m}}{1\text{ s}} = 5\text{ m/s}$.

Al ir de D a E, la rapidez es de $\frac{7\text{ m}}{1\text{ s}} = 7\text{ m/s}$.

Al ir de E a F, la rapidez es de $\frac{9\text{ m}}{1\text{ s}} = 9\text{ m/s}$.

Puedes notar que en cada intervalo, la rapidez aumenta en 2 m/s.

## Actividad 26

I. Al sustituir los valores de la aceleración (2 m/s$^2$), velocidad inicial (0 m/s) y posición inicial (que también vale cero, si colocas el origen de tu sistema de referencia en la posición desde la que el automóvil comienza a moverse), en la ecuación $d = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + d_0$, se obtendrá

$$d = \frac{1}{2}(2)t^2 + 0(t) + 0$$

que al simplificar se convierte en

$$d = t^2$$

II. Sustituimos en la ecuación $t = 16$:

$$d = 16^2$$
$$d = 256$$

Lo que significa que cuando han pasado 16 segundos, el vehículo ya se encuentra a 256 m de distancia.

## Actividad 27

I. Si el recorrido lleva 3 segundos, la ecuación nos dará $d = (3)^2 = 9$ metros.
II. De un modo similar, $d = (10)^2 = 100$ metros.
III. Ahora se sabe que la distancia recorrida son 500 metros, y se quiere obtener el tiempo empleado para ello. Se usa de nuevo la ecuación, sustituyendo el valor dado para la distancia:

$$500 = t^2$$

Y se despeja $t$, quedando

$$t = \sqrt{500} = 22.36\text{ segundos},$$

aproximadamente (pues si realizas el cálculo, notarás que en realidad se obtienen más cifras decimales; al no incluirlas todas, estamos realizando una aproximación a la cifra correcta, que en todo caso podría expresarse simplemente como $\sqrt{500}$ ).

IV. Si ahora la distancia son 700 metros, se tendrá

$$700 = t^2$$

Y al despejar $t$, quedará

$$t = \sqrt{700} = 26.46 \text{ segundos},$$

de nuevo aproximadamente.

## Actividad 28

¡Reflexiónalo un momento! La presencia del aire impide que los objetos caigan con auténtica libertad, pues el aire ejerce una fuerza de fricción que se opone al movimiento; eso explica por qué los paracaidistas pueden salir ilesos de sus saltos: el paracaídas aprovecha la fricción del aire y la maximiza, hasta el punto en que la persona que lo emplea cae con una velocidad suficientemente baja como para no sufrir daño alguno al llegar al suelo.

## Actividad 29

I. Al soltarlo, la velocidad del objeto dejará de ser cero y comenzará a aumentar hasta que llegue al suelo, así que sí, su movimiento será acelerado.

II. La responsable de que el objeto acelere es la atracción gravitacional que la Tierra ejerce sobre él.

III. La aceleración provocada por la gravedad terrestre varía dependiendo del lugar en el que te encuentres, pero se acepta un valor promedio de 9.81 $m/s^2$.

IV. Si no le das ningún impulso hacia abajo ni hacia arriba, la velocidad inicial del objeto es cero.

V. Su posición inicial dependerá del lugar donde coloques el origen de tu sistema de referencia. Si lo colocas en tu mano, su posición inicial será cero; si lo colocas en el suelo directamente debajo de tu mano, su posición inicial será la altura sobre el suelo a la cual lo estés sosteniendo.

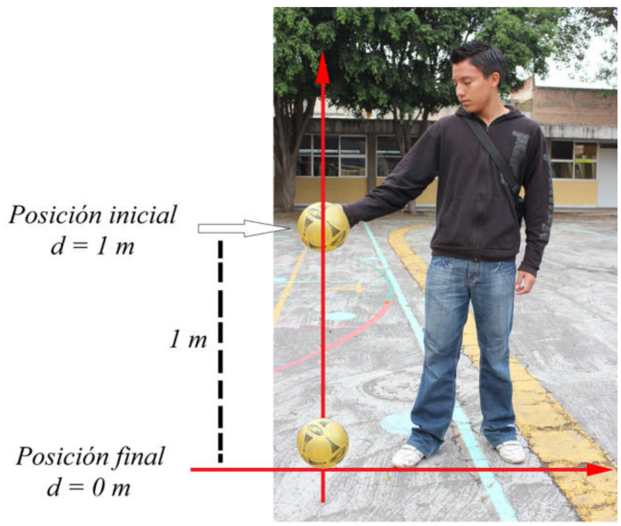
VI. La ecuación dependerá de la elección de tu sistema de referencia y de la altura a la que sostengas el objeto. Por ejemplo, si colocas el origen del sistema en el suelo, directamente debajo de donde sostienes el objeto, que además queda a un metro de altura, la ecuación $d = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + d_0$ se convertirá en

$$d = \frac{1}{2}(-9.81)t^2 + 0(t) + 1$$

Hemos tomado la dirección hacia "abajo" como negativa, y como la gravedad apunta en esa dirección, le hemos colocado el signo correspondiente. La ecuación se simplifica y queda

$$d = -4.90t^2 + 1$$

VII. Cuando el objeto llegue al suelo, el valor de d dependerá de dónde hayas colocado tu sistema de referencia. Con las suposiciones de la pregunta anterior, cuando el objeto llegue al suelo su posición será $d = 0$; Mira la figura:




Si $d = 0$, la ecuación quedará

$$0 = -4.90t^2 + 1$$

Para despejar $t$, hagamos

$0 - 1 = -4.90t^2$ Restamos 1 a ambos lados de la ecuación

$\frac{-1}{-4.90} = t^2$ Dividimos entre –4.90 ambos lados de la ecuación

$\sqrt{\frac{-1}{-4.90}} = t$ Sacamos raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación

Entonces, tenemos

$$t = \sqrt{\frac{-1}{-4.90}} = 0.45 \text{ segundos}.$$

Los cálculos reales dependerán de tu propia elección para la colocación del sistema de referencia, y de la altura a la que tú estés sosteniendo el objeto.

## Actividad 30

I. Suponiendo que al saltar el paracaidista no adquiere velocidad inicial y que el origen del sistema de referencia se coloca en el suelo, directamente debajo de donde ocurre el salto, su ecuación de movimiento

$$d = \frac{1}{2}(-9.81)t^2 + 0(t) + d_0$$

Recuerda que no conocemos la posición inicial $d_0$; de hecho esa es la pregunta. La ecuación se simplifica y queda

$$d = -4.90t^2 + d_0$$

Cuando el paracaidista llegue al suelo, su posición será $d = 0$. Como además queremos que le tome un tiempo de 10 segundos alcanzar esa posición, la ecuación quedará

$$0 = -4.90(10)^2 + d_0$$

Simplificamos y despejamos $d_0$, de modo que tenemos

$$0 = -490 + d_0$$
$$\Rightarrow\ d_0 = 490 \text{ metros.}$$

Desde luego, recuerda que por simplicidad, estamos ignorando el efecto de la fricción del aire. De tomarla en cuenta, la ecuación del movimiento tendría que incluir un término que correspondiera a la "desaceleración" provocada por dicha fricción. Si así lo hiciéramos y tomáramos a la fricción en consideración, ¿cómo crees que se modificarían nuestros resultados? Al llegar al suelo en 10 segundos, ¿el paracaidista tendría que haber saltado desde una posición más alta o más baja?

II. Empleando las mismas ideas de la pregunta anterior, la ecuación a resolver es

$$0 = -4.90(20)^2 + d_0$$

Simplificando y despejando $d_0$ obtendremos

$$0 = -1\ 960 + d_0$$
$$d_0 = 1\ 960 \text{ metros.}$$

III. La azotea de la Torre Mayor de la Ciudad de México está a una altura aproximada de 225 metros sobre el suelo. Con las suposiciones de las preguntas anteriores (velocidad inicial cero, origen del sistema de referencia colocado directamente debajo del punto desde el cual se deja caer el objeto), la ecuación del movimiento correspondiente será

$$d = \frac{1}{2}(-9.81)t^2 + 0(t) + 225$$

Simplificamos y queda

$$d = -4.90t^2 + 225$$

Queremos averiguar el tiempo en que el objeto alcanzará la posición $d = 0$. Entonces la ecuación se convierte en

$$0 = -4.90t^2 + 225$$

Y al despejar $t$ se obtendrá

$$t = \sqrt{\frac{-225}{-4.90}} = 6.78 \text{ segundos},$$

aproximadamente.

IV. Sabemos que el objeto estará sometido a la aceleración de la gravedad durante toda su caída (ignorando, desde luego, la fricción del aire). Esta aceleración vale $-9.81$ m/s$^2$ (ya que se designó como positiva la dirección hacia "arriba").

Por otro lado, empleando la definición de aceleración, tenemos

$$-9.81 = \frac{\text{Cambio en la velocidad}}{\text{Tiempo que toma el cambio}}$$

¿Cuánto cambia la velocidad si comenzó siendo cero y al final de la caída tiene un cierto valor $v_f$? Reflexiónalo un momento. Este cambio será simplemente el mismo valor $v_f$.

Por otro lado, el tiempo que este cambio ocurre es el tiempo que dura la caída, el cual se calculó en la pregunta anterior. Entonces, la expresión para la aceleración se convierte en

$$-9.81 = \frac{v_f}{6.78}$$

Despejamos la velocidad final $v_f$ y tendremos

$$v_f = -9.81(6.78) = 66.61 \text{ m/s}$$

V. La ecuación del movimiento de esta piedra es similar a las anteriores; esta vez conocemos su velocidad inicial (cero) pero desconocemos su posición inicial. La llamaremos $d_0$. La ecuación será

$$d = \frac{1}{2}(-9.81)t^2 + 0(t) + d_0$$
$$d = -4.90t^2 + d_0$$

Sabemos que la piedra alcanza el fondo del barranco en 3 segundos. Con el origen del sistema de coordenadas colocado en el lugar donde la piedra toca el suelo, eso significa que cuando $t = 3$ segundos, el valor de $d$ es cero, así que tenemos

$$0 = -4.90(3)^2 + d_0$$

$$4.90(3)^2 = d$$
$$44.1 = d$$

De manera que el barranco tiene 44.1 metros de profundidad.

VI. Para el clavadista la ecuación del movimiento es $d = -4.90t^2 + 10$ con un sistema de referencia cuyo origen está en la superficie del agua. Eso significa que al llegar al agua, se tendrá $d = 0$, lo cual convierte la ecuación en

$$0 = -4.90t^2 + 10$$

Un despeje sencillo nos lleva a

$$t = \sqrt{\frac{10}{4.90}}$$
$$t = 1.43 \text{ s}$$

El valor negativo del tiempo no tiene un significado físico, así que nos quedamos con el valor positivo. De esta manera, resulta que el clavadista tarda aproximadamente 1.43 segundos en llegar al agua.

## Actividad 32

I. El movimiento es uniformemente acelerado, pues la pelota está sometida a la aceleración de la gravedad, la cual es constante (para fines prácticos)

II. La ecuación que describe cualquier movimiento uniformemente acelerado es

$$d = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + d_0$$

En este caso, la aceleración es $-9.81$ m/s$^2$, la velocidad inicial $v_0$ es desconocida (por el momento) y la posición inicial $d_0$ dependerá de tu elección del sistema de referencia, y de la altura a la que sostengas el aparato. Tomando esto en cuenta, la ecuación se puede reescribir como

$$d = -4.90t^2 + v_0t + d_0$$

III. Aquí está la tabla completa:

| Elemento | Desconocido | Conocido | Valor |
|---|---|---|---|
| Posición inicial de la pelota | | * | Depende de tu elección para el origen del sistema de referencia, y de la altura a la que sostengas el aparato. |
| Posición final de la pelota | | * | El suelo. Su valor depende de tu elección para el origen del sistema de referencia. |
| Aceleración a la que está sometida la pelota | | * | La aceleración gravitacional: $-9.81$ m/s$^2$ o $-9.81$ m/s$^2$, dependiendo de la dirección que designes como positiva. |

| Elemento | Desconocido | Conocido | Valor |
|---|---|---|---|
| Velocidad inicial de la pelota | * | | |
| Tiempo en el que la pelota llega a su posición final | | * | Lo obtuviste con las mediciones que se te pidieron antes en la misma actividad. |

IV. La posición de la pelota no es la misma que su posición final porque no regresará al mismo lugar desde el que salió disparada: lo más probable es que la dispares, suba una cierta altura, y luego caiga al suelo. Si el origen del sistema de referencia está en el suelo, directamente debajo de donde la pelota sale disparada, su posición inicial será la altura a la que la sostienes justo antes de dispararla; su posición final será el suelo: cero.

V. En la pregunta (II) de esta misma sección escribimos la ecuación que corresponde al movimiento de la pelota,

$$d = -4.90t^2 + v_0 t + d_0$$

Si conoces el tiempo en que la pelota llega a su posición final (el suelo), podrás calcular el valor de su velocidad inicial. Medir ese tiempo es una de las tareas que se te proponen en esta actividad, así que hazlo si no lo has hecho todavía.

Por ejemplo, si la posición inicial de la pelota fuera 1 m, y si el tiempo que tarda en llegar al suelo fuera de 15 segundos, al sustituir ambos datos en la ecuación se tendría

$$0 = -4.90(15)^2 + v_0(15) + 1$$

Simplificando y despejando la velocidad inicial $v_0$ se tendrá

$$0 = -1\ 102.5 + 15v_0 + 1$$

$$\Rightarrow v_0 = \frac{1\ 102.5 - 1}{15} = 73.43 \text{ m/s}$$

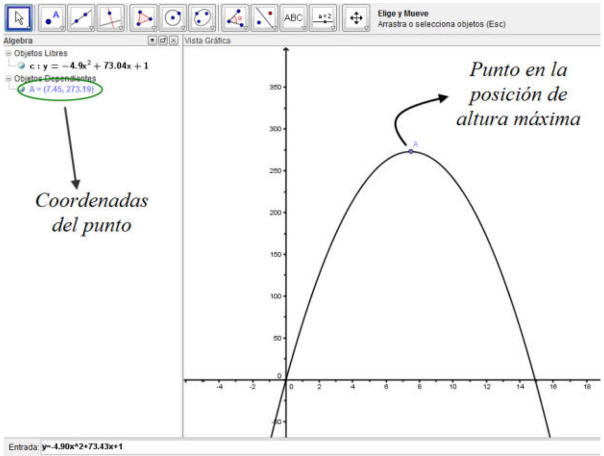
Así que en este caso hipotético, la ecuación que describe el movimiento de la pelota sería

$$d = -4.90t^2 + 73.43t + 1$$

Efectúa los cálculos con el tiempo de caída que hayas medido experimentalmente, y determina la ecuación que describe el movimiento de la pelota empleando ese valor.

VI. Las gráficas necesarias tendrás que dibujarlas tú en Geogebra, empleando para ello la ecuación que hayas encontrado. Aquí emplearemos el ejemplo que propusimos en la pregunta anterior, $d = -4.90t^2 + 73.43t + 1$.

Aquí está su gráfica en Geogebra:

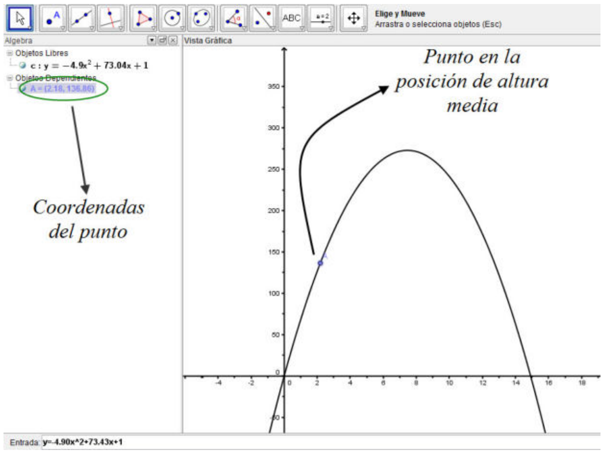



Recuerda que para que Geogebra comprenda la ecuación, debemos escribir "*x*" en lugar de "*t*" y "*y*" en lugar de "*d*". La operación potencia se representa mediante el acento circunflejo ^. Además procura emplear las herramientas de "zoom de acercamiento" y "zoom de alejamiento" (debajo del icono "Desplaza vista gráfica"). Si además haces clic secundario sobre la vista gráfica, se desplegará un menú contextual que, entre otras cosas, te permite alterar la relación de aspecto entre los ejes "*x*" y "*y*". Explora y descubre la mejor manera de visualizar tu gráfica.

Las coordenadas en las que la pelota alcanza su máxima altura son (7.45, 273.19). Eso significa que cuando han transcurrido aproximadamente 7.45 segundos, la pelota alcanza su altura máxima de aproximadamente 273.19 metros.

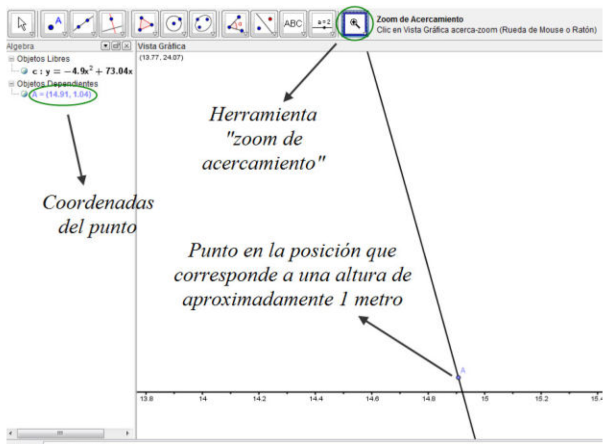
VII. De acuerdo con la pregunta anterior, la altura máxima se alcanza a los 7.45 segundos.

VIII. Moviendo el punto a la mitad de la altura máxima, se tiene:



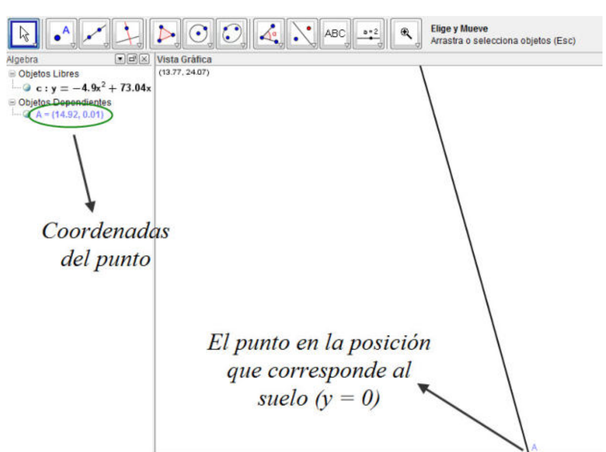
Sus coordenadas son (2.18, 136.86), lo que significa que aproximadamente a los 2.18 segundos, la pelota llega a la mitad de su altura máxima (que no es exactamente 136.86; esas son las desventajas de este enfoque gráfico).

IX. Empleando la herramienta "zoom de acercamiento" que se encuentra debajo de "Desplaza vista gráfica", podemos hacer un acercamiento a la curva para mover el punto con mayor precisión, hasta la altura 1 metro, que representaría el momento en que la pelota regresa a su posición inicial (recuerda que en este ejemplo su posición inicial había sido de 1 metro sobre el suelo):




Las coordenadas del punto son (14.91, 1.04), lo cual significa que a los 14.91 segundos, la pelota había llegado a 1.04 metros del suelo.

X. Empleando el mismo nivel de "zoom", movemos el punto a la posición que corresponde al suelo, $y = 0$:



Las coordenadas del punto son (14.92, 0.01), lo que significa que a los 14.92 segundos, la pelota prácticamente había tocado el suelo: estaba a 0.01 metros de él.

## Actividad 33

I. De acuerdo con lo afirmado en el texto, la coordenada $t$ del vértice se encontrará justo a medio camino entre los 0 s y los 6.5, s. Esto significa que se encontrará en $t = 3.25$, es decir, la pelota alcanzará su altura máxima a los 3.25 segundos.

II. Empleando la ecuación $d = -0.5t^2 + 3.25t + 2$, y sustituyendo el valor recién encontrado para la posición del vértice ($t = 3.25$) se encuentra que la altura máxima es de aproximadamente 7.28 metros.

## Actividad 34

La ecuación con la que se trabajará es

$$y = ax^2 + bx + c$$

Primero hallamos el valor de "$y$" para el cual $x = 0$. Sustituimos $x = 0$ en la ecuación y tenemos

$$y = a(0)^2 + b(0) + c$$
$$y = c$$

O sea, las coordenadas del punto donde la parábola corta al eje vertical son $(0, c)$. Ahora bien, existe otro punto, simétrico respecto al eje de simetría de la gráfica, cuya coordenada "$y$" también vale $c$. Para encontrar el valor de $x$ en este otro punto, sustituimos $y = c$ en la ecuación y tenemos

$$c = ax^2 + bx + c$$
$$c - c = ax^2 + bx$$
$$0 = ax^2 + bx$$
$$0 = x(ax + b)$$

Lo cual da dos soluciones, $x = 0$ (que ya conocíamos) y $x = -\frac{a}{b}$.

La coordenada $x$ del vértice está justo a medio camino entre estos dos valores. Es decir, la coordenada $x$ del vértice queda dada por la expresión $-\frac{b}{2a}$.

Sustituimos ese valor en la ecuación para obtener el correspondiente valor de la coordenada "$y$":

$$y = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

Al elevar al cuadrado el primer término y efectuar el producto indicado en el segundo, se llega a

$$y = a\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

Ahora, se efectúa el producto que queda indicado en el primer término:

$$y = \frac{b^2 a}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

Al simplificar el primer término se tiene

$$y = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

Finalmente, se efectúa la sustracción de fracciones entre el primer y segundo términos, lo que da como resultado

$$y = -\frac{b^2}{4a} + c$$

Es decir, el valor de la coordenada "$y$" para el vértice es $c - \dfrac{b^2}{4a}$.

## Actividad 35

Empleando las expresiones deducidas en la actividad anterior, las coordenadas de los vértices de cada una de las funciones propuestas son:

I. $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{8}{2(2)} = -2$ $\quad y = c - \dfrac{b^2}{4a} = -9 - \dfrac{8^2}{4(2)} = -17$

II. $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{6}{2(3)} = -1$ $\quad y = c - \dfrac{b^2}{4a} = 4 - \dfrac{6^2}{4(3)} = 1$

III. $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{(-7)}{2(1)} = 3.5$ $\quad y = c - \dfrac{b^2}{4a} = 2 - \dfrac{(-7)^2}{4(1)} = -10.25$

IV. $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{10}{2(-2)} = 2.5$ $\quad y = c - \dfrac{b^2}{4a} = 11 - \dfrac{10^2}{4(-2)} = 1.5$

## Actividad 36

I. Con las suposiciones que se hacen en el texto, el movimiento de este cohete quedará descrito por la ecuación $d = \dfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + d_0$, que se convertirá en

$$d = -4.9t^2 + 40t + 1$$

II. Si la ecuación anterior se grafica, se obtendrá una parábola en el plano $t$ vs $d$. El tiempo en que se alcanza la altura máxima (y el valor de esa altura) se pueden calcular hallando el vértice de esa parábola. Empleando las técnicas que se estudiaron en la sección anterior, la posición del vértice resulta está dada por las fórmulas

$$t=-\frac{b}{2a}$$

$$d=c-\frac{b^2}{4a}$$

Al sustituir los valores correspondientes, se tiene

$$t=-\frac{40}{2(-4.9)}=4.08 \text{ s}$$

$$d=1-\frac{40^2}{4(-4.9)}=82.63 \text{ m}$$

Es decir, el cohete llegará a su altura máxima en 4.08 segundos.

III. Mira la respuesta anterior. La altura máxima será de 82.63 m.

IV. La mitad de la altura máxima es 41.315 m. Para averiguar el tiempo en que el cohete llega a esa altura, sustituimos $d = 41.315$ en la ecuación que describe su movimiento:

$$41.315=-4.9t^2+40t+1$$

Igualamos a cero

$$0=-4.9t^2+40t-40.315$$

y empleamos la fórmula general:

$$t=\frac{-40\pm\sqrt{40^2-4(-4.9)(-40.315)}}{2(-4.9)}$$

Lo cual dará

$$t=\frac{-40\pm 28.46}{-9.8}=\begin{cases} t_1=1.17 \text{ s} \\ t_2=6.96 \text{ s}\end{cases}$$

Es decir, el cohete pasa en dos momentos diferentes por la altura $d$ = 41.315 m. Es lógico: la primera será en la subida, la segunda en la bajada. Así que la respuesta a la pregunta es que el cohete alcanzará la mitad de su altura máxima (de subida) a los 1.17 segundos.

V. Queremos averiguar cuánto tiempo debe transcurrir para que la posición del cohete sea el suelo, que se encuentra a 1 m por debajo de su posición inicial (es decir, $d = -1$ m). Esto significa que la ecuación de movimiento del cohete se convierte en

$$-1=-4.9t^2+40t+1$$

Igualando a cero, se tiene

$$0 = -4.9t^2 + 40t + 1 + 1 \quad 0 = -4.9t^2 + 40t + 2$$

Al aplicar la fórmula general, tendremos

$$t = -40 \pm \sqrt{40^2 - 4(-4.9)(2)^2(-4.9)}$$

De donde se llega a

$$t = -40 \pm 40.49 - 9.8 = \begin{cases} t_1 = -0.05 \\ t_2 = 8.21 \end{cases}$$

El valor negativo para t no tiene un significado físico (¿qué significa, matemáticamente hablando?), así que nos quedamos con el valor positivo; el cohete cae al suelo después de 8.21 segundos.

## Actividad 37

I. Responder esta pregunta requiere que encuentres las coordenadas del vértice de la parábola que representa el movimiento de la pelota. Empleando la ecuación-ejemplo

$$d = -4.90t^2 + 73.43t + 1$$

junto con las expresiones halladas en la actividad precedente, tendremos

$$h = -\frac{73.43}{2(-4.90)} = 7.49$$

$$k = 1 - \frac{(73.43)^2}{4(-4.90)} = 276.10$$

Esto significa que a los 7.49 segundos, la pelota alcanza su altura máxima de 276.10 metros. Compara esto con los resultados de la sección Disparo al cielo azul. Estos valores son mucho más confiables, al no depender de la calidad de la gráfica, ni de su escala, ni de la sensibilidad con la que puedas moverte sobre ella.

II. De acuerdo con lo encontrado en la pregunta anterior, la pelota alcanza su altura máxima a los 7.49 segundos.

III. La mitad de la altura máxima que acabamos de encontrar es $\frac{276.10}{2} = 138.05$ metros. El tiempo que tarda la pelota en alcanzar esa altura lo encontraremos sustituyendo este valor en la ecuación correspondiente,

$$d = -4.90t^2 + 73.43t + 1$$

Al sustituir la altura de 138.05 metros, tendremos

$$138.05 = -4.90t^2 + 73.43t + 1$$

Ahora necesitamos resolver esta ecuación para determinar el valor de $t$; eso se puede lograr empleando la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sin embargo, para que la formula pueda emplearse, primero hay que igualar la ecuación a cero, restándole 138.05 a ambos lados:

$$0 = -4.90t^2 + 73.43t + 1 - 138.05$$

que al simplificarse queda

$$-4.90t^2 + 73.43t - 137.05 = 0$$

Y entonces la fórmula general queda

$$t = \frac{-73.43 \pm \sqrt{73.43^2 - 4(-4.90)(-137.05)}}{2(-4.90)}$$

$$\Rightarrow t = \frac{-73.43 \pm \sqrt{2\ 705.78}}{-9.8}$$

$$\Rightarrow t = \frac{-73.43 \pm 52.02}{-9.8} = \begin{cases} t_1 = 2.18 \\ t_2 = 12.80 \end{cases}$$

Esto significa que hay dos valores para el tiempo $t$, en los que la pelota se encuentra a la mitad de su altura máxima: ello tiene sentido, pues el primer tiempo corresponde a la pelota en su camino de subida, mientras que el segundo corresponde al camino de bajada.

IV. Su posición inicial, en este ejemplo, es $d = 1$; al sustituirlo en la ecuación del movimiento queda

$$1 = -4.90t^2 + 73.43t + 1$$

Al simplificar queda

$$-4.90t^2 + 73.43t = 0$$

y al aplicar la fórmula general se tiene

$$t = \frac{-73.43 \pm \sqrt{73.43^2 - 4(-4.90)(0)}}{2(-4.90)}$$

$$\Rightarrow t = \frac{-73.43 \pm \sqrt{5\ 391.96}}{-9.8}$$

$$\Rightarrow t = \frac{-73.43 \pm 73.43}{-9.8} = \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 14.99 \end{cases}$$

Así que hay dos valores de tiempo para los que la pelota está en su posición inicial suelo; el primero es $t = 0$, que indica simplemente el instante antes de que saliera disparada hacia arriba; el segundo es 14.99 y corresponde al momento en que la pelota, ya cayendo de regreso, vuelve a esa altura inicial.

V. Si la pelota llega al suelo, significará que su posición es $d = 0$. Entonces,

$$0 = -4.90t^2 + 73.43t + 1$$

Y podemos usar directamente la fórmula general:

$$t = \frac{-73.43 \pm \sqrt{73.43^2 - 4(-4.90)(1)}}{2(-4.90)}$$

$$\Rightarrow t = \frac{-73.43 \pm \sqrt{5\,411.56}}{-9.8}$$

$$\Rightarrow t = \frac{-73.43 \pm 73.56}{-9.8} = \begin{cases} t_1 = -0.01 \\ t_2 = 15 \end{cases}$$

El primer valor del tiempo no tiene significado físico (el tiempo no puede ser negativo); el segundo es el que responde la pregunta: a los 15 segundos, la pelota llega al suelo.

## Actividad 38

I. Debes aumentar la velocidad inicial tanto como sea posible y ajustar el ángulo a 45°.

II. Debes aumentar tanto el ángulo de salida como la velocidad inicial tanto como sea posible.

III. 45°

## Actividad 40

I. De las tres primeras razones trigonométricas, la que involucra a la hipotenusa y al cateto adyacente a un ángulo es la razón coseno.

II. De las tres primeras razones trigonométricas, la que involucra a la hipotenusa y al cateto opuesto a un ángulo es la razón seno.

III. Las respuestas están en el texto.

Por otro lado, de acuerdo con lo abordado en el texto, para el caso general de un vector $r$ que forma un ángulo $\theta$ con el eje $x$, se tiene

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{r_y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{r_x}{r}$$

multiplicando cada una de esas expresiones por $r$, se llega a

$$r \text{ sen } \theta = r_y$$
$$r \cos \theta = r_x$$

que son las fórmulas presentadas en el texto para dicho caso general.

## Actividad 41

I. Empleando los métodos descritos en esta sección, las ecuaciones para las componentes horizontal y vertical del movimiento de la flecha resultan ser, respectivamente,

$$d_x = 38 \cos 20° t$$
$$d_y = -4.9t^2 + 38 \text{ sen } 20° t + 1$$

(colocando el origen del sistema de referencia en un punto en el suelo, directamente debajo de donde la flecha sale disparada). Averiguar su tiempo de vuelo, es averiguar el tiempo en el que su posición vertical $d_y$ llega a valer cero; entonces, tomamos la ecuación correspondiente y hacemos $d_y = 0$:

$$0 = -4.9t^2 + 38 \text{ sen } 20° t + 1$$

O lo que es lo mismo,

$$-4.9t^2 + 13t + 1 = 0$$

(pues 38 sen 20° vale aproximadamente 13). Resolvemos esta ecuación empleando la fórmula general, y tendremos

$$t = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4(-4.9)(1)}}{2(-4.9)}$$

$$t = \frac{-13 \pm 13.73}{-9.8} = \begin{cases} t_1 = -0.07 \\ t_2 = 2.73 \end{cases}$$

El valor $t_1$ es negativo y no tiene un significado físico (aunque sí matemático… ¿cuál?), así que el valor que nos interesa es $t_2 = 2.73$, que significa que la flecha se mantendrá en el aire durante 2.73 segundos… a menos que algún obstáculo (como el blanco) se interponga en su camino.

II. Para averiguar si la flecha alcanzará la posición del blanco, tomamos la ecuación correspondiente a la componente horizontal de su movimiento y sustituimos en ella el tiempo de vuelo que acabamos de calcular:

$$d_x = 38 \cos 20° (2.73)$$

Lo cual dará

$$d_x = 97.48$$

Eso significa que, si ningún obstáculo se interpusiera en su camino, la flecha recorrería una distancia de 97.48 m. Como el blanco se encuentra sólo a 90 m, resulta que sí lo alcanzará, y sobradamente.

## Actividad 42

I. La componente horizontal quedará descrito por la ecuación $d_x = 6t$. La componente vertical, por $d_y = -4.9t^2 + 3$.

II. Primero averiguamos el tiempo en que llega al suelo, y para ello usamos la ecuación correspondiente a la componente vertical de su movimiento; si llega al suelo, se tendrá $d_y = 0$ y entonces,

$$0 = -4.9t^2 + 3$$

Lo cual dará

$$t = \sqrt{\frac{3}{4.9}}$$

$$t = 0.78 \text{ s}$$

En ese tiempo, recorrerá una distancia horizontal determinada por la ecuación para $d_x$, es decir,

$$d_x = 6(0.78)$$

$$d_x = 4.68 \text{ m}$$

III. En la pregunta anterior se halló esta respuesta.

## Actividad 43

Dependiendo de tu elección para la colocación del sistema de referencia, y suponiendo que estás escribiendo la velocidad en m/s y el tiempo en segundos, la ecuación para la componente horizontal del movimiento podría ser $d_x = 55.55t$.

La correspondiente a la componente vertical sería $d_y = -4.9t^2 + 3\ 000$.

De vuelta al avión de ayuda humanitaria

I. Los paquetes deben soltarse a las 2 horas con 30 minutos de vuelo, aproximadamente.

Asegúrate de realizar los cálculos por tu cuenta. La lista de cotejo que se presenta en el texto es una buena guía para saber si estás haciendo todo lo necesario.

Aquí está la lista de cotejo con los resultados que deberías obtener en cada paso:

| Elementos de la solución | |
|---|---|
| Escribiste las ecuaciones del movimiento para el paquete en su caída desde el avión hacia la plaza central del pueblo. | $d_x = v_{0x}t$<br>$d_y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + 3\,000$ |
| Identificaste correctamente los valores de la posición inicial, la velocidad inicial y la aceleración del paquete, en la componente vertical de su movimiento. | Colocando el origen del sistema de referencia en el suelo, justo debajo de donde los paquetes inician su caída:<br>Posición inicial: 3000 m.<br>Velocidad inicial: 0 m/s.<br>Aceleración: -9.81 m/s$^2$. |
| Identificaste correctamente los valores de la posición inicial, la velocidad inicial y la aceleración del paquete, en la componente horizontal de su movimiento. | Colocando el origen del sistema de referencia en el suelo, justo debajo de donde los paquetes inician su caída:<br>Posición inicial: 0 m.<br>Velocidad inicial: 200 km/h<br>Aceleración: 0 m/s$^2$. |
| Expresaste todas las cantidades en el mismo sistema de unidades (es decir, las expresaste todas usando metros y segundos, o las expresaste todas en kilómetros y horas) | Todo está expresado en metros y segundos, excepto la velocidad del avión (200 km/h), que equivale a 55.55 m/s. |
| Calculaste el tiempo de caída del paquete | 24.74 segundos aproximadamente. |
| Calculaste la distancia horizontal recorrida por el paquete en su caída. | 1374.3 m, aproximadamente. |
| Calculaste la distancia que deberá recorrer el avión para soltar el paquete. | 498625.7 m, aproximadamente. |
| Calculaste el tiempo de vuelo del avión para cubrir la distancia anterior. | 8976.16 s, aproximadamente. |
| Expresaste este tiempo en horas. | 2 horas 29 minutos, aproximadamente. |

# Unidad 2

## Actividad 1

I. Siguiendo la sugerencia, resulta que el ángulo entre canastilla y canastilla es de 18°.

II. Como 180° equivalen a π rad, se pueden emplear las técnicas de conversión de unidades de la sección 1.2 Convirtiendo unidades, y se tendrá

$$18° \times \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{18\pi}{180}\text{rad} = \frac{\pi}{10}\text{rad}$$

En el primer paso, se efectúa la multiplicación y los grados se cancelan, de modo que sólo sobreviven los radianes. En el segundo y último paso se simplifica la fracción e127, que da e128. Como π es un número irracional (tiene infinita cantidad de cifras decimales que no siguen un patrón periódico), a veces verás que se le deja expresado así, con la letra π, y no escribiendo sus primeras cifras decimales, 3.141592653…

## Actividad 2

I. Primero, la circunferencia de la rueda mide $2\pi(10) = 62.83$ metros, aproximadamente.

Esa es la longitud del arco que correspondería a un ángulo de 360°. Si el ángulo se reduce a la mitad, también lo hará la longitud del arco, así que para un arco de 180° (la mitad de 360°), la longitud del arco es 31.41 metros (aproximadamente).

II. Si lo razonas con cuidado, verás que no es tan complicado. Respecto a los 360° que corresponden a la circunferencia entera, 18° representan una fracción de $\frac{18}{360} = \frac{1}{20}$, por lo que la longitud del arco que corresponde a los 18° (y que es la distancia que separa una canastilla de la siguiente) será también una fracción de $\frac{1}{20}$ respecto a la circunferencia total de 62.83 metros. Es decir, si llamamos la esta longitud de arco, tendremos

$$\frac{l}{62.83} = \frac{1}{20}$$

Un rápido despeje nos dará

$$l = 62.83\left(\frac{1}{20}\right) = \frac{62.83}{20} = 3.14 \text{ metros}$$

que es la longitud del arco que separa una canastilla de la siguiente.

## Actividad 3

I. Antes que nada, el área cubierta por la circunferencia entera es e133. Ahora bien, el sector representado en la figura corresponde a un ángulo de 18°, que como se argumentó antes, representa una fracción de e134 de la circunferencia total. Entonces su área será también e134 del área total de 314.16 m$^2$. Esto significa que, si $A_s$ es el área del sector, tendremos

$$\frac{A_s}{314.16} = \frac{1}{20}$$

de donde se obtiene inmediatamente que el área del sector es

$$A_s = 314.16\left(\frac{1}{20}\right) = \frac{314.16}{20} = 15.71 \text{ m}^2$$

## Actividad 4

Al emplear la fórmula para la longitud de una circunferencia, $l = 2\pi r$, empleando un radio de rotación igual al radio de la Tierra más la altura a la que se mueve el satélite, se encuentra que la longitud de su órbita es de aproximadamente 102855.74 kilómetros.

## Actividad 5

I. Si la rueda da dos vueltas cada minuto, entonces la canastilla recorre en un minuto la longitud correspondiente a dos circunferencias. La circunferencia de esta rueda mide 62.83 m, (ver actividades anteriores) y un minuto tiene 60 s, así que la rapidez lineal de la canastilla es

$$v = \frac{2(62.83)}{60} = 2.09 \text{ m/s}$$

II. Según lo establecido respecto a la rapidez angular, se le calcula dividiendo "ángulo recorrido" / "tiempo empleado para recorrerlo". Si la rueda da dos vueltas en un minuto, entonces está recorriendo un ángulo de 4π rad (recuerda que se nos pide obtener la rapidez angular en unidades de rad/s, y que 360° equivalen a 2π rad) en un tiempo de 60 segundos. Esto significa que la rapidez angular $\omega$ es

$$\omega = \frac{4\pi}{60} = \frac{\pi}{15} \text{rad/s}$$

## Actividad 6

I. El periodo es el tiempo que toma completar un ciclo. Si la rueda da dos vueltas (ciclos) por minuto, entonces sólo le lleva 30 segundos dar una vuelta. Ese es su periodo.

II. La frecuencia es el número de ciclos que se completan en cada unidad de tiempo (en este caso, cada segundo). Si la rueda da dos vueltas cada minuto (60 segundos), entonces en un segundo sólo completa $\frac{2}{60} = \frac{1}{30}$ de vuelta. La frecuencia es entonces $\frac{1}{30}$ Hz.

III. Si lo reflexionas con cuidado y te auxilias con las ideas de las dos preguntas anteriores, notarás que el periodo $T$ puede calcularse a partir de la frecuencia $f$ mediante la expresión $T = \frac{1}{f}$, y viceversa, la frecuencia se puede calcular haciendo $f = \frac{1}{T}$.

IV. Si se mueve en una trayectoria circular de 30 cm (0.3 m) de radio, entonces al dar una vuelta completa recorre un arco cuya longitud es e143. Esto lo realiza en 1 segundo, así que su rapidez lineal es $v = \frac{1.88}{1} = 1.88 \text{ m/s}$.

Al dar una vuelta completa, recorre un ángulo de 2π rad, lo que significa que su rapidez angular es $\omega = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ rad/s}$.

V. El hecho de que la rapidez angular sea $\frac{\pi}{4}$ rad/s significa que en un segundo el rotor cubre un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ rad. El ciclo completo sería cubrir $2\pi$ rad. Esto significa que en un segundo, se cubre una fracción del ciclo completo igual a

$$\frac{\pi/4}{2\pi} = \frac{\pi}{8\pi} = \frac{1}{8}$$

Así que la frecuencia del movimiento es $\frac{1}{8}$ Hz.

Su rapidez angular, en grados/segundo, se obtiene mediante una transformación de unidades:

$$\frac{\pi}{4}\text{rad/s} \times \frac{180°}{\pi \text{ rad}} = \frac{180\pi}{4\pi}\text{grados/s} = 45 \text{ grados/s}$$

VI. El periodo es el tiempo que le lleva a la Tierra dar una vuelta completa sobre su propio eje. Tomemos este tiempo como 24 horas, que equivalen a 86400 segundos.

De acuerdo con lo establecido en actividades anteriores, su frecuencia es $f = \frac{1}{86\,400}$ Hz.

VII. El minutero tarda 60 minutos (3600 segundos) en dar una vuelta completa al reloj (o sea, cubrir un ángulo de $2\pi$ rad). Su rapidez angular será (en rad/s)

$$\omega = \frac{2\pi}{3\,600} = \frac{\pi}{1\,800} \text{ rad/s}$$

El segundero tarda 60 segundos en dar la vuelta completa, así que su rapidez angular será

$$\omega = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30} \text{ rad/s}$$

La manecilla de las horas tarda 12 horas (43200 segundos) en dar una vuelta completa. Su rapidez angular será

$$\omega = \frac{2\pi}{43\,200} = \frac{\pi}{21\,600} \text{ rad/s}$$

## Actividad 7

Para calcular el tiempo que el satélite tarda en dar una vuelta completa a la Tierra, sólo hace falta considerar que su velocidad lineal es de 18000 km/h y que la longitud de su órbita, que calculaste anteriormente es de 102855.74 kilómetros. Como la velocidad lineal está dada por

$$v = \frac{l}{t}$$

Se puede despejar a $t$, quedando

$$t = \frac{l}{v}$$

Así, el tiempo en que el artefacto dará una vuelta completa al planeta será

$$t = \frac{102\ 855.74}{18\ 000} = 5.71 \text{ horas}$$

que equivalen a cerca de 5 horas 42 minutos y 51 segundos.

## Actividad 8

I. De acuerdo con el texto, la longitud de arco recorrida en un tiempo $t$ está dada por

$$l = vt + l_0$$

en donde $v$ es la velocidad lineal de la canastilla y $l_0$ es la longitud de arco desde la cual la canastilla inicia su recorrido.

Para hallar $l_0$, consideremos lo siguiente: si el movimiento comienza desde un ángulo de 30°, los argumentos de la actividad 2, inciso (II) de la sección 2.2 En la rueda de la fortuna nos permiten calcular la longitud de arco inicial, al recordar que $l_0$ será a la circunferencia completa como 30° son a 360°:

$$\frac{l_0}{62.83} = \frac{30°}{360°}$$

(recuerda que la circunferencia de la rueda ya se había calculado, y vale 62.83 metros). Despejando, tenemos

$$l_0 = 62.83\left(\frac{30°}{360°}\right) = 5.23 \text{ metros}$$

La velocidad lineal, que se calculó en la sección anterior, es de 2.09 m/s. Entonces, la longitud de arco que esa canastilla alcanza después de un minuto (60 segundos) es

$$l = 2.09(60) + 5.23 = 130.63 \text{ m/s}$$

Para el ángulo, emplearemos (2.3),

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

El ángulo inicial es de 30°, la velocidad angular es la misma de la sección anterior, e163 (que equivale a 12 °/s) de modo que el ángulo que alcanza la canastilla después de un minuto es

$$\theta = 12(60) + 30 = 750°$$

II. Empleando los mismos argumentos pero para un ángulo inicial de –20° (que significa que el ángulo se mide en el sentido de las manecillas del reloj), se tiene una longitud de arco inicial de

$$l_0 = 62.83\left(\frac{-20°}{360°}\right) = -3.49 \text{ metros}$$

De modo que la longitud de arco a la que se llega después de un minuto es

$$l = 2.09(60) - 3.49 = 121.91 \text{ m/s}$$

y el ángulo es

$$\theta = 12(60) - 20 = 700°$$

III. Si se quiere averiguar en cuánto tiempo la canastilla del inciso (I) llega a una longitud de arco de 40 metros, se emplea la ecuación $l = vt + l_0$ con $l = 40$, y se tiene

$$40 = 2.09t + 5.23$$

Despejando $t$ queda

$$t = \frac{40 - 5.23}{2.09} = 16.64 \text{ s}$$

IV. Empleamos la ecuación $\theta = \omega t + \theta_0$ para la canastilla del inciso (II) con $\theta = 270°$, de modo que tenemos

$$270 = 12t - 20$$

y al despejar $t$ se obtiene

$$t = \frac{270 - 20}{12} = 20.83 \text{ s}$$

V. Una persona sentada en el Ecuador terrestre sigue un movimiento que es aproximadamente circular uniforme, debido a la rotación de la Tierra. El radio de este movimiento es el radio de la Tierra, que en el Ecuador es de aproximadamente 6 378 000 m.

En un día (86400 segundos) esta persona recorre la circunferencia de la Tierra, que vale e172. Su velocidad lineal es entonces

$$v = \frac{40\ 074\ 155.89}{86\ 400} = 463.82 \text{ m/s}$$

Eso significa que el tiempo $t$ en que recorrerá longitud de arco de 100 km (100 000 m) se puede calcular haciendo

$$\frac{100\ 000}{t} = 463.82$$

Al despejar $t$ se tendrá

$$t = \frac{100\ 000}{463.82} = 215.60 \text{ segundos}$$

que equivalen a unos 3 minutos y medio.

VI. Para calcular el ángulo recorrido en este tiempo necesitamos la velocidad angular de la persona. Como en un día recorre 360°, dicha velocidad es

$$\omega = \frac{360°}{86\ 400} = 0.0042\ °/\text{s}$$

Así que el ángulo cubierto en 215.60 segundos se puede calcular escribiendo

$$\frac{\theta}{215.60} = 0.0042$$

Al despejar $\theta$ resulta

$$\theta = 215.60(0.0042) = 0.90°$$

VII. Puesto que la rueda tiene 8 rayos igualmente espaciados, cada rayo estará separado del siguiente por un ángulo de 45°. Empleando los datos del problema, esto permite calcular la longitud del arco entre rayo y rayo:

$$\frac{l}{188.49} = \frac{45°}{360°}$$

donde se ha empleado la circunferencia de la rueda, e180, y se ha empleado el hecho de que la longitud de este arco es a la circunferencia completa, como los 45° son a 360°. Al despejar $l$ se tiene

$$l = 188.49\left(\frac{45}{360}\right) = 23.56 \text{ cm}$$

De manera que entre rayo y rayo hay una longitud de arco de 23.56 cm entre rayo y rayo, en la parte más exterior de la rueda (que es hacia donde conviene disparar para tener una mejor oportunidad de que la flecha alcance a pasar).

Necesitas que los 24 cm de la flecha pasen antes de que la parte externa de un rayo recorra esos 23.46 cm. Para determinar el tiempo en que esto último ocurre recurriremos a la definición de la velocidad lineal,

$$v = \frac{l}{t}$$

donde $l$ es la longitud de arco recorrida en un tiempo $t$. La rueda tiene una circunferencia de e183. Si da 2.5 revoluciones por minuto, entonces su velocidad lineal es de e184. De este modo podemos escribir

$$7.85 = \frac{23.46}{t}$$

Y al despejar $t$, queda

$$t = \frac{23.46}{7.85} = 2.99 \text{ s}$$

Eso significa que la flecha debe atravesar sus 24 cm en menos de esos 2.99 segundos. En otras palabras, debe moverse a una velocidad mínima de

$$v = \frac{24}{2.99} = 8.03 \text{ cm/s}$$

VIII. Como se indicó hace unas líneas, la flecha debe apuntarse lo más cerca posible de la parte exterior de la rueda (pues ahí los rayos están más separados).

## Actividad 9

Como debiste observar en la sección 2.2.1 Señor operador, ¿qué tan rápido vamos? La frecuencia $f$ se puede obtener a partir del periodo $T$ mediante la relación

$$f = \frac{1}{T}$$

Recordando que el periodo de este satélite se calculó en 5 horas 42 minutos y 51 segundos (equivalentes a 20 571 segundos), la frecuencia será e189.

## Actividad 10

I. La altura de la canastilla oscila entre los 10 m y los –10 m.
II. Cuando el ángulo rebasa los 180°, la altura de la canastilla se vuelve negativa. Para comprender por qué, necesitas dibujar la gráfica en Geogebra o usando lápiz y papel, y realizar la actividad.
III. Cuando el ángulo rebasa los 360°, los valores para la altura de la canastilla comienzan a repetirse. Para comprender por qué, necesitas dibujar la gráfica en Geogebra o empleando lápiz y papel, y realizar la actividad.
IV. Por las razones anteriores, si continúas dando vueltas los valores de $h$ se repetirán cada vez que des una vuelta. Esto quiere decir que $h$ es una cantidad periódica: : presenta ciclos que se repiten cada determinado periodo.

## Actividad 11

El periodo es de 360°. Su amplitud es de 10 m.

## Actividad 12

I. Debes dibujar la gráfica en Geogebra para notar que presenta ciclos que se repiten cada 6.2 unidades, aproximadamente. Es decir, su periodo es de aproximadamente 6.2.
II. Recuerda (en la sección 2.2 En la rueda de la fortuna se entró en detalles al respecto) que 360° corresponden a un ángulo que abarca una circunferencia completa; como la circunferencia tiene una longitud de $2\pi r$ y un radián es el ángulo que corresponde a una longitud de arco igual a $r$, entonces 360° equivalen a $2\pi$ radianes

III. En forma decimal, $2\pi$ vale aproximadamente 6.28. Entonces los resultados sí son coherentes con lo que se observa en la gráfica.

## Actividad 13

Dibuja las gráficas que se solicitan, ya sea empleando Geogebra o lápiz y papel, para comprender las respuestas siguientes:

I. Las amplitudes de las funciones mostradas serán, respectivamente, 5, 1, 8 y 2.
II. Todas las funciones tendrán un periodo de $2\pi$ radianes.

## Actividad 14

I. Los periodos serán nuevamente de $2\pi$ radianes.
II. Las amplitudes serán, respectivamente: 1, 3, 7, 4.

## Actividad 15

Dibuja las gráficas que se solicitan, ya sea empleando Geogebra o lápiz y papel, para comprender las respuestas siguientes:

I. Su periodo será de 30 unidades.
II. Las ecuaciones con sus respectivos periodos aparecen a continuación:

| Ecuación | Periodo |
|---|---|
| $y = sen(x)$ | $2\pi$ |
| $y = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ | 4 |
| $y = sen(2\pi\ x)$ | 1 |
| $y = sen(3\pi\ x)$ | 0.6 (aprox.) |
| $y = sen\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$ | 3 |
| $y = sen\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$ | 2.1 (aprox.) |
| $y = cos(x)$ | $2\pi$ |
| $y = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ | 4 |
| $y = \cos(2\pi\ x)$ | 1 |
| $y = \cos(3\pi\ x)$ | 0.6 (aprox.) |

| Ecuación | Periodo |
|---|---|
| $y = \cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$ | 3 |
| $y = \cos(3x)$ | 2.1 (aprox.) |

III. Todas tienen amplitud 1.

IV. Al aplicar la fórmula $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ a cada una de las funciones propuestas, se obtiene:

a) $T = \dfrac{2\pi}{1} = 2\pi$

b) $T = \dfrac{2\pi}{\dfrac{\pi}{2}} = 4$

c) $T = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$

d) $T = \dfrac{2\pi}{3\pi} = \dfrac{2}{3}$

e) $T = \dfrac{2\pi}{\dfrac{2\pi}{3}} = 3$

f) $T = \dfrac{2\pi}{3}$

g) $T = \dfrac{2\pi}{1} = 2\pi$

h) $T = \dfrac{2\pi}{\dfrac{\pi}{2}} = 4$

i) $T = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$

j) $T = \dfrac{2\pi}{3\pi} = \dfrac{2}{3}$

k) $T = \dfrac{2\pi}{\dfrac{2\pi}{3}} = 3$

l) $T = \dfrac{2\pi}{3}$

## Actividad 16

I. La gráfica sufrirá un desplazamiento, un "corrimiento" que en el caso de que $\theta_0$ valga $\dfrac{\pi}{3}$, será hacia la izquierda.

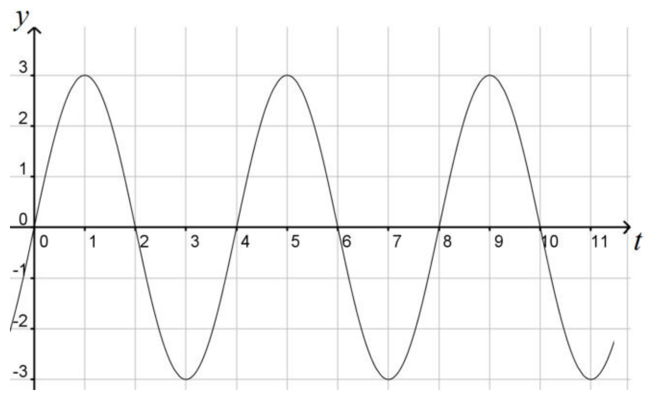
## Actividad 17

I. Significa que el movimiento que se esté describiendo no comenzará desde la posición $t = 0$, sino desde una adelantada, que será aquella en la que se hubiera encontrado a los tres segundos de movimiento, si hubiera iniciado normalmente.

## Actividad 18

I. Una función que involucre el cálculo de alguna razón trigonométrica de una de las variables. Por ejemplo, una función como $y = 2 \cos x$ es una función trigonométrica.

II. Sus gráficas típicamente presentan un aspecto de ondas, ciclos que se repiten cada que la variable dependiente alcanza determinados valores:




III. Bajo las condiciones supuestas, la gráfica de una función seno comienza desde el origen de coordenadas, mientras que la de una función coseno lo hace desde un punto por encima del origen, determinado por la amplitud de la función.

Recuerda que debido a la definición de esas dos funciones trigonométricas (sección 2.3 Funciones trigonométricas y el círculo unitario), cuando el argumento vale cero, la función seno vale cero también, mientras que la función coseno vale 1.

IV. Que sus valores comienzan a repetirse cuando la variable dependiente rebasa cierto valor, que es el periodo de la función. Las gráficas terminan presentando el aspecto ondulatorio, periódico, que caracteriza a las funciones trigonométricas.

V. El periodo de funciones de la forma $y = \text{sen}\ (\omega x + \theta_0)$, $y = \cos\ (\omega x + \theta_0)$ se puede calcular mediante la expresión $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

VI. Una función seno o coseno se caracteriza porque sus valores oscilan entre dos valores extremos; la amplitud de la función es la mitad de la distancia entre esos valores extremos. Si la ecuación que corresponde a una de estas funciones tiene las formas $y = A\ \text{sen}\ (\omega x + \theta_0)$, $y = \text{A}\cos\ (\omega x + \theta_0)$, su amplitud queda determinada por el valor de la constante A.

VII. El corrimiento (o desplazamiento) de fase es, como su nombre lo indica, un desplazamiento de la gráfica en la dirección horizontal; la forma de calcularlo a partir de una ecuación del tipo $y = A\ \text{sen}\ (\omega x + \theta_0)$, $y = \text{A}\cos\ (\omega x + \theta_0)$, es mediante la expresión $\varphi = -\dfrac{\theta_0}{\omega}$. Dependiendo del signo de $\varphi$, el desplazamiento será a la izquierda (si es negativo) o a la derecha (si es positivo).

## Actividad 19

I. El periodo será 6.

II. Recuerda qué cosa es el diámetro de una circunferencia, para comprender por qué en este caso vale 12 centímetros.

III. Hay un corrimiento de fase igual a $\varphi = -\dfrac{(-\pi)}{\pi/3} = 3$.

IV. Si el periodo fuera de 9 segundos, entonces la velocidad angular tendría que estar dada por

$$9 = \frac{2\pi}{\omega}$$

que al despejarse queda

$$\omega = \frac{2\pi}{9}$$

Por otra parte, el corrimiento de fase de 2 segundos implica que

$$2 = -\frac{\theta_0}{\frac{2\pi}{9}}$$

Así que al despejar $\theta_0$ se tiene

$$\theta_0 = -\frac{4\pi}{9}$$

Y entonces la ecuación que corresponde a este movimiento es

$$y = 35\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{9}t - \frac{4\pi}{9}\right)$$

V. Las ecuaciones son, respectivamente,

$$y = \mathrm{sen}(2\pi t)$$

$$y = 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$y = 3\cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y = \mathrm{sen}(2t - \pi)$$

$$y = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

VI. La amplitud es de 1. El periodo es $\dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$, y el corrimiento de fase es $-\dfrac{3}{4}$.

## Actividad 20

Como se quiere medir el tiempo en horas, debes escribir el periodo del satélite también en horas. La amplitud del movimiento del satélite es de 16 370 km (el radio de la Tierra, más la altura a la que se encuentra su órbita), y su periodo (el tiempo en que da una vuelta completa al planeta) ya se había calculado en 5.71 horas. Esto significa que la expresión para el cálculo del periodo,

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Se puede rescribir como

$$5.71 = \frac{2\pi}{\omega}$$

De donde se puede obtener la velocidad angular $\omega$; al despejarla, queda

$$\omega = \frac{2\pi}{5.71}$$

De esta manera, la ecuación deberá tener la forma $h = 16\ 370\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{5.71}t\right)$.

## Actividad 21

I. El carrusel da cuatro vueltas por minuto. Eso significa que da una vuelta en quince segundos. Entonces, la rapidez lineal de Balam es de $v_B = \frac{2\pi(4)}{15} = 1.67$ m/s. La de Ana es $V_A = \frac{2\pi(2.6)}{15} = 1.09$ m/s .

Nota que las rapideces lineales dependen del radio de la trayectoria circular que siga cada hermano; a mayor radio, mayor rapidez lineal.

Por otra parte, las rapideces angulares para ambos hermanos son exactamente iguales, pues ambos recorren el mismo ángulo en el mismo tiempo. El valor de esta rapidez angular es $\omega = \frac{2\pi}{15} = 0.42$ rad/s, aproximadamente.

II. Sólo tiene sentido decir que un hermano se mueve más rápido que el otro si estamos hablando de rapideces lineales, porque como acabamos de ver, sus rapideces angulares son iguales.

## Actividad 22

I. El punto B recorre una longitud de arco mayor que la recorrida por A, pues se encuentra en una posición más alejada del centro y por lo tanto se mueve a lo largo de una circunferencia mayor.

II. De un modo similar a lo que ocurre con Balam y Ana, las rapideces angulares son iguales, mientras que el punto que se mueva sobre la trayectoria de mayor radio tendrá mayor velocidad lineal.

III. Lo mejor que puede hacer es moverse rápidamente hacia el centro de la hélice, donde la rapidez lineal es menor.

IV. Como la rapidez lineal se obtiene a partir de la rapidez angular mediante la expresión $v = \omega r$, se puede observar que para una rapidez angular determinada, a un mayor radio de rotación, corresponderá una mayor rapidez lineal. Esto significa que quienes están al final de la fila experimentan una rapidez lineal mucho mayor que los que están cerca de quien hace girar la fila. Eso hace que sea muy fácil para ellos perder el control y soltarse cuando los giros son muy bruscos.

V. Si sólo tomamos en cuenta los movimientos de rotación de la Tierra y de la Luna, entonces la persona sentada en nuestro planeta se mueve más rápido (hablando de rapideces lineales) pues el radio de la Tierra es mayor que el de la Luna, y si has estado resolviendo las actividades, entenderás que eso significa que su rapidez lineal también es mayor.

VI. Discútelo con otros estudiantes, pero lo mejor es que la estrella central (la que está conectada directamente a los pedales) tenga un radio sensiblemente mayor al de la estrella trasera; como están conectadas por la cadena, al girar ambas tendrán la misma velocidad angular, pero la mayor velocidad lineal de la estrella central se traducirá en una mayor rapidez para la bicicleta.

## Actividad 23

I. La Luna tarda aproximadamente 27.32 días en dar una vuelta completa a nuestro planeta, así que ese es su periodo. Son aproximadamente 2 360 448 segundos.

La frecuencia de su movimiento es de $f = \frac{1}{2\ 360\ 448} = 0.00000042$ Hz $= 4.2 \times 10^{-7}$ Hz.

Su velocidad angular es $\omega = \frac{2\pi}{2\ 360\ 448} = 0.0000027$ rad/s $= 2.7 \times 10^{-6}$ rad/s.

El radio promedio de la órbita lunar alrededor de la Tierra es de 384 400 000 m, así que de acuerdo con lo visto en las actividades anteriores, su rapidez lineal es de $v = 2.7 \times 10^{-6}(384\ 400\ 000) = 1\ 023.22$ m/s.

II. Empleando los datos correspondientes para la Tierra en su movimiento alrededor del Sol, tenemos que su periodo es de 32 850 000 segundos.

La frecuencia es $f = \frac{1}{32\ 850\ 000} = 0.00000003$ Hz $= 3 \times 10^{-8}$ Hz.

La velocidad angular es $\omega = \frac{2\pi}{32\ 850\ 000} = 0.00000019$ Hz $= 1.9 \times 10^{-7}$ Hz.

El radio promedio de la órbita terrestre alrededor del sol es de 150 000 000 000 m. Entonces su velocidad lineal es de aproximadamente $v = 1.9 \times 10^{-7}(150\ 000\ 000\ 000) = 28\ 690.34$ m/s.

Asegúrate de realizar por ti mismo los cálculos, o no estarás comprendiendo algunos de ellos.

III. Mira la amplitud de la función que describe el movimiento. La altura de la punta de la hélice, medida respecto a su centro, oscila 5 y –5 m, lo que quiere decir que en total, la hélice mide 10 metros de punta a punta.

IV. El periodo de su movimiento es $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ s, lo que significa que da una vuelta en dos segundos, o media revolución (una revolución es una vuelta completa) cada segundo. Así que por minuto son 30 revoluciones.

V. Lo contestamos en la pregunta anterior: le toma 2 segundos dar una vuelta.

VI. El instante en que el movimiento se comenzó a registrar es el momento en que $t = 0$, así que empleando la ecuación dada y efectuando las operaciones indicadas, tenemos

$$y = 5\cos\left(\pi(0) - 2\pi\right) = 5\cos(-2\pi) = 5$$

Toma una calculadora científica y asegúrate de que entiendes cómo se obtiene ese resultado. La punta de la hélice se hallaba a 5 metros de altura (respecto al centro del aparato) cuando se comenzó a registrar el movimiento.

## Actividad 24

I. Los tres puntos experimentan la misma aceleración angular, por razones que discutimos en la sección anterior. Cuando Norma alcanza su velocidad lineal constante de 20 m/s, el punto D tiene esa misma rapidez lineal; eso quiere decir que podemos calcular su velocidad angular $\omega$ si recordamos que $v = \omega r$, es decir,

$$20 = \omega\ (0.30)$$

de donde

$$\omega = \frac{20}{0.30} = 66.67 \text{ rad/s}$$

Como le toma 5 segundos llegar a esta rapidez, la aceleración angular de la rueda (y los tres puntos) es $a_\theta = \frac{66.67}{5} = 13.33 \text{ m/s}^2$.

II. Las rapideces lineales para cada punto sí son diferentes. Cuando la rueda alcanza la velocidad angular de 66.67 rad/s, el punto A tiene una rapidez lineal de (recuerda que se pide obtenerla en metros sobre segundo):

$$v_A = 66.67(0.258) = 17.20 \text{ m/s}$$

Así que su aceleración lineal es $a_A = \frac{17.20}{5} = 3.44 \text{ m/s}^2$.

Para el punto B, la rapidez lineal es

$$v_B = 66.67(0.216) = 14.40 \text{ m/s}$$

Y su aceleración lineal es $a_B = \frac{14.40}{5} = 2.88 \text{ m/s}^2$.

Finalmente, para el punto D la rapidez lineal es de 20 m/s (está en el extremo de la rueda) y su aceleración lineal es $a_D = \frac{20}{5} = 4 \text{ m/s}^2$.

III. Comencemos por el punto A. Su movimiento circular quedará descrito por una función trigonométrica similar a las introducidas en la sección 2.3. Funciones trigonométricas y el círculo unitario. Llamemos $h_A$ a su altura sobre el punto C. Si tomamos su posición como la "posición cero", entonces no hay corrimiento de fase y la ecuación que describe a $h_A$ es

$$h_A = 25.8 \text{ sen } (66.67t)$$

Para el caso de B, comienza su movimiento con un ángulo inicial de −120° (negativo porque se mide en sentido de las manecillas del reloj, 120° porque es dos veces 60°; mira bien la figura correspondiente). En radianes (recuerda que al manejar funciones el argumento debe escribirse en radianes) equivale a $-\frac{2\pi}{3}$. Ese es entonces el valor del ángulo inicial $\theta_0$ que tendremos que sustituir en la expresión $h_A = A \text{ sen}(\omega t + \theta_0)$. La función resulta ser

$$h_A = 21.6 \text{ sen}\left(66.67t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

Empleando argumentos similares, la función que describe la altura $h_D$ del punto D es

$$h_D = 30 \text{ sen}\left(66.67t - \frac{\pi}{3}\right)$$

## Actividad 25

I. Si el periodo es de un segundo, su frecuencia es $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1} = 1$ Hz.

## Actividad 26

I. Si tu péndulo tiene un periodo de un segundo, el periodo del movimiento de su sombra será de medio segundo. Lleva a cabo la actividad experimental para comprender por qué.
II. Necesitarás medir la amplitud de este movimiento experimentalmente. Toma una regla o cinta métrica, y determina qué tan amplia es la oscilación. La amplitud será la mitad de la medida que obtengas, de acuerdo con lo que hemos estudiado.
III. La función tendrá la forma $h = a \text{ sen}(4\pi t + \theta_0)$. Los valores de la amplitud $a$ y de $\theta_0$ dependerán de las dimensiones particulares de tu péndulo, y de la posición que asignes al origen del sistema de coordenadas.

## Al rescate del satélite perdido

I. Tal y como lo has calculado en las cápsulas de seguimiento, deben transcurrir 5 horas 30 minutos con 51 segundos.
II. La transmisión debe efectuarse antes de que el satélite pase directamente sobre la base terrestre. De lo contrario, como la señal no llega de forma inmediata

hasta él, para cuando llegue a la altura a la cual se encuentra la órbita del satélite, éste ya se habrá movido.

III. Aproximadamente 0.033 segundos antes. La señal se moverá a la velocidad de la luz, 300 000 km/s aproximadamente, y ese es el tiempo que le tomará cubrir los 10 000 km desde tierra hasta la órbita del satélite.

IV. Tomando en cuenta el corrimiento de fase del movimiento, y que el tiempo se está midiendo en minutos, la ecuación tendrá la forma

$$h = 16\ 370\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{342.85}t + \frac{24\pi}{342.85}\right).$$

Esta es la lista de cotejo que se propone en la actividad, con los valores y respuestas que debes hallar en cada elemento de la solución:

| Elementos de la solución | |
|---|---|
| Expresaste todas las cantidades en el mismo sistema de unidades (es decir, las expresaste todas usando metros-segundos, o todas usando kilómetros-horas). | Es recomendable comenzar expresándolo todo en kilómetros y horas; al final, para mayor precisión, conviene expresar el tiempo en minutos. |
| Calculaste la longitud de la órbita del satélite alrededor de nuestro planeta. | Aproximadamente 102855.7 km |
| Calculaste el tiempo que tarda el satélite en dar una vuelta completa a nuestro planeta. | 5.71 horas, o 5 horas con 42 minutos y algunos segundos (aproximadamente). |
| Determinaste el tiempo que el satélite tardará en pasar de nuevo sobre la base terrestre, a partir del momento en que se perdió contacto con él. | 5 horas con 30 minutos y 51 segundos. |
| Hallaste el tiempo que tarda la señal de radio en llegar desde la base en tierra hasta el satélite en órbita. | 0.033 segundos. |
| Determinaste si la señal debe enviarse unos momentos antes o después de lo calculado inicialmente, debido a que no llega de forma inmediata hasta el satélite. | Hay que enviarla antes. |
| Hallaste el periodo del satélite. | 5.71 horas (342.85 minutos) |
| Hallaste el ángulo inicial del satélite. | $\frac{24\pi}{342.85}$ |
| Escribiste la ecuación para la posición h de satélite como función del tiempo. | La ecuación que describe un movimiento circular es $h = a\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta_0)$ Al sustituir los valores correspondientes a la velocidad angular $\omega$ y al ángulo inicial $\theta_0$, se tiene $h = 16\ 370\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{342.85}t + \frac{24\pi}{342.85}\right)$ |

# Unidad 3

## Actividad 1

I. La mejor manera de lograrlo es quitar con un movimiento brusco el aro de madera, de modo que las tuercas caigan dentro de la botella.

II. Las tuercas se encuentran en reposo, y tienden a mantenerse así a menos que algo se oponga a ello. Cuando remueves rápidamente el aro de madera, las tuercas tienden a quedarse en su lugar, pero al perder su soporte (el aro) caen dentro de la botella.

## Actividad 2

I. De un modo similar al experimento anterior, la mejor manera de lograrlo es quitar bruscamente la tarjeta (por ejemplo, dándole un golpe con el dedo índice).

II. La moneda está en reposo y tiende a quedarse así a menos que algo se oponga a ello. Al remover la tarjeta, la moneda tiende a quedarse en su lugar, pero al perder su soporte (la tarjeta) cae dentro del vaso.

## Actividad 3

I. Las sondas continuarán su movimiento rectilíneo uniforme de manera indefinida, alejándose hacia el espacio interestelar para el resto de los tiempos.

II. No. Mientras nada se oponga a su movimiento, las sondas mantendrán su velocidad sin cambios.

## Actividad 4

La aceleración que le impartirás al objeto será menor.

## Actividad 5

I. A mayor fuerza, mayor será la aceleración que experimentará el objeto.

II. La fuerza y la aceleración son directamente proporcionales: a mayor fuerza, mayor aceleración y viceversa.

III. Sí.

## Actividad 6

I. Procedamos por partes. Si $F$ y $a$ son directamente proporcionales, entonces se puede escribir que

$$F = k_1 a$$

en donde $k_1$ es una constante de proporcionalidad entre fuerza y aceleración.

II. Por otro lado, si $m$ y $a$ son inversamente proporcionales, entonces

$$ma = k_2$$

en donde $k_2$ es una constante de proporcionalidad inversa entre masa y aceleración.

III. Reflexionando sobre lo discutido en el texto, puedes concluir que la constante de proporcionalidad $k_1$ entre fuerza y aceleración es la masa, y que la constante de proporcionalidad inversa $k_2$ entre masa y aceleración es la fuerza. Así que ambas expresiones se convierten en una sola,

$$F = ma$$

## Actividad 8

I. La masa puede considerarse como una medida de la inercia de un cuerpo, aunque en sentido estricto masa e inercia no son lo mismo: masa es el nombre que hemos dado a la cantidad de materia que tiene un cuerpo; inercia es la tendencia de ese cuerpo a mantenerse en reposo, si está en reposo, o en movimiento rectilíneo uniforme, si se encuentra moviéndose de esa manera. Por supuesto, a mayor masa mayor inercia, y viceversa.

II. La masa es una medida de la cantidad de materia que tiene un cuerpo (y también de su inercia, como acabamos de discutir). El peso es una fuerza, la fuerza con la que la gravedad de un planeta atrae hacia su centro los objetos que se encuentran en su superficie. Ciertamente, a mayor masa mayor peso (bajo la misma aceleración gravitacional), pero masa y peso no son lo mismo.

III. La atracción de la gravedad es mayor mientras más cerca se esté del centro de la Tierra, y lo mismo ocurre con el peso de los objetos. Eso significa que el peso de un objeto aumentará (tal vez de manera imperceptible, pero lo hará) cuando se le coloca a nivel del mar, disminuirá cuando se le coloca en la cima del monte Everest, y dado que la aceleración gravitacional en la Luna es bastante menor que en la Tierra, el peso del objeto disminuirá sensiblemente cuando se le coloca en la superficie del satélite.

IV. La masa es siempre la misma, en todos los casos.

V. Reflexiónalo un momento. Un objeto tiene la misma masa sin importar en dónde se encuentre; sin embargo, su peso puede cambiar (revisa la respuesta anterior). Por lo tanto (VI) El SI emplea los kilogramos (kg) para medir masa, y los newtons (N) para medir fuerza, como el peso.

VII. El peso de un objeto es la fuerza con la que lo atrae la gravedad. De acuerdo con la segunda ley de Newton, ($F = ma$) el peso $p$ de un objeto de masa $m$ obtiene haciendo $p = mg$, donde $g$ es la aceleración de la gravedad. Entonces el ladrillo que tiene 1 kg de masa tendrá un pero de $p = 1(9.81) = 9.18$ N.

VIII. Empleando las mismas ideas, la masa de un objeto que pesa 50 N se calcula con ayuda de la segunda ley de Newton, al escribir $50 = m(9.81)$. Se despeja $m$ y queda $m = \frac{50}{9.81} = 5.10\ \text{kg}$, aproximadamente.

IX. Medita sobre las respuestas a las otras preguntas de esta actividad. Describe, con tus propias palabras y con todo el detalle que puedas, cuál es la diferencia entre masa y peso. Por ejemplo, la masa es una cantidad más fundamental que el peso. ¿Qué más?

## Actividad 9

50 toneladas equivalen a 50 000 kg de masa, lo cual tiene un peso de aproximadamente 490 500 N.

## Actividad 10

I. Recibirás un impulso que te hará moverte —acelerar— alejándote de la pared. La fuerza que ejerciste sobre la pared resultó en otra fuerza, que te impulsa a ti y a la patineta en dirección opuesta.

II. Si las pelotas son lo suficientemente masivas y/o las arrojas con la suficiente fuerza, la patineta se moverá en la dirección opuesta. La fuerza que ejerces sobre las pelotas al arrojarlas se traduce en una nueva fuerza, que te impulsa a ti y a la patineta en la dirección opuesta.

III. Proporcionarás una aceleración a tu amigo, quien rodará alejándose de ti; pero al mismo tiempo y sin que puedas evitarlo, recibirás una fuerza en sentido contrario que te impulsará a ti y te hará rodar también alejándote de tu amigo.

## Actividad 11

I. Algunos ejemplos podrían ser: el rebote de una pelota contra el suelo (la pelota ejerce fuerza sobre el suelo, el cual ejerce una reacción sobre la pelota), el culatazo que da un rifle sobre el hombro de quien lo dispara (la explosión de la pólvora ejerce una fuerza sobre la bala, que ejerce una reacción sobre el rifle —y este sobre la persona), la abolladura de un automóvil al golpear una pared (el auto ejerce fuerza sobre la pared, que en respuesta ejerce una reacción sobre el auto, deformándolo), etcétera…

## Actividad 13

Suponiendo que el conductor no acelera (evidentemente no puede frenar pues el auto se ha quedado sin frenos) y que la superficie de la carretera es horizontal, las fuerzas que actúan en esta situación son el peso del automóvil, la fuerza normal que el suelo ejerce sobre el vehículo, la fricción que la superficie de la carretera ejerce sobre el mismo oponiéndose a su movimiento, y la fuerza de reacción que las llantas ejercen sobre la superficie de la carretera. De ellas, sólo la fuerza normal y la fricción de la superficie actúan sobre el automóvil, y sólo la fricción se opone a su movimiento.

## Actividad 14

I. La fuerza de acción que Adrián ejerce sobre el remolque genera una fuerza de reacción en sentido opuesto, que el remolque ejerce sobre Adrián.

   Al caminar, los pies de Adrián ejercen una fuerza hacia atrás sobre el suelo, la cual da lugar a una fuerza hacia adelante que el suelo ejerce sobre los pies del niño. Esta fuerza proporciona la tracción que lo hace avanzar al dar cada paso.

   La Tierra ejerce sobre Adrián una fuerza atractiva de acción (el peso de Adrián) que genera una fuerza de reacción de Adrián sobre la Tierra, que la atrae hacia él.

   Algo similar ocurre con el remolque y la Tierra.

II. Al intentar caminar sobre el lago, la fricción —responsable de la fuerza hacia atrás que Adrián ejerce sobre el suelo— prácticamente desaparece, con lo que también desaparece la reacción a ella: la fuerza hacia adelante que el suelo ejerce sobre Adrián y que proporcionaba la tracción que le permitía avanzar. Como resultado, el niño tendrá bastantes problemas para seguir moviéndose.

III. La fuerza que tú ejerces sobre la Tierra: así como la Tierra te atrae a ti, tú también atraes a la Tierra.

IV. Los pasajeros ejercen fuerza sobre el transporte al empujarlo; el transporte ejercerá una fuerza sobre ellos igual y opuesta. Sin embargo, el transporte no se mueve —no acelera— porque los pies de los pasajeros ejercen otra fuerza sobre él, igual y opuesta a aquella con la que están empujando, por lo que ambas se cancelan y la fuerza neta sobre el transporte es cero.

   Por otra parte, los pasajeros tampoco irán a ninguna parte porque la fuerza que el transporte ejerce sobre ellos (como reacción a su empuje) se cancela con la fuerza —igual y opuesta— que el mismo transporte ejerce sobre los pies de cada pasajero.

V. Porque la masa del cañón es mucho mayor que la masa de la bala, y ya hemos discutido cómo masa y aceleración son inversamente proporcionales.

VI. Manuel no está tomando en cuenta que las dos fuerzas de las que habla actúan sobre objetos diferentes, por lo que no es verdad que se cancelen, y no tiene razón cuando dice que nunca podrá hacer que el remolque se mueva.

   La fuerza que él ejerce sobre el remolque será suficiente para moverlo; la fuerza de reacción no actúa sobre el remolque, sino sobre Manuel, y él la vencerá gracias a la tracción de sus piernas sobre el suelo.

## Actividad 15

I. La magnitud del vector es de alrededor de 15 N.

II. Su dirección (medida desde la dirección de **D**) es de aproximadamente 20°.

## Actividad 16

I. La magnitud de **T** es de unos 4 N.
II. Su ángulo de dirección es cercano a los 20°.
III. Tomando en cuenta que el aro tiene una masa de 1.5 kg, la fuerza neta **T** le impartirá una aceleración dada por la segunda ley de Newton: $F = ma$, de modo que

$$4 = 1.5a$$

Y despejando $a$, quedará

$$a = \frac{4}{1.5} = 2.67\ \text{m/s}^2$$

Esta aceleración tendrá lugar en la dirección de T, aproximadamente 20°.

## Actividad 19

Con los nuevos resultados, la aceleración del aro será $a = \frac{3.46}{1.5} = 2.31\ \text{m/s}^2$, en la dirección de **T** que resulta ser de 21.367°.

## Actividad 20

I. La aceleración del paracaidista será la que le imparta la fuerza neta que actúe sobre él. De acuerdo con el enunciado del problema, las únicas fuerzas que inciden sobre él son su peso y la fricción del aire, así que fuerza neta será $F_n = 60(9.81) - 20 = 568.6$ N.

Entonces al paracaidista sufrirá una aceleración dada por la segunda ley de Newton, $a = \frac{568.6}{60} = 9.48\ \text{m/s}^2$, ligeramente menor que la aceleración que le proporcionaría la gravedad en ausencia de fricción del aire.

II. La fuerza neta que actuará sobre el arado tendrá una magnitud (como podrás comprobar si realizas la suma de vectores correspondiente) de 6.40 N. Su dirección será de aproximadamente 38.66°. De esta manera, el arado experimentará una aceleración que de acuerdo con la segunda ley de Newton valdrá

$$a = \frac{6.40}{9} = 0.71\ \text{m/s}^2$$

y estará dirigida a 38.66°.

III. Sólo la componente horizontal de la fuerza de Manuel acelera el carrito. Esta componente vale $F_x = 13\cos 30° = 11.26$ N. La aceleración del carrito será entonces $a = \frac{11.26}{6} = 1.88\ \text{m/s}^2$.

IV. Para que Manuel levante el carrito. La componente vertical de su fuerza debe ser mayor que el peso del carrito, el cual es igual a $6(9.81) = 58.86$ N. La componente vertical está dado por

$$F_{My} = F_M \operatorname{sen}\theta$$

donde $F_M$ es la magnitud de la fuerza que con la que el joven tendría que jalar el carrito para levantarlo. Entonces, se tiene

$$58.86 = F_M \operatorname{sen}(30°)$$

Despejando $F_M$, tendremos

$$F_M = \frac{58.86}{\operatorname{sen}(30°)} = 117.72 \text{ N}$$

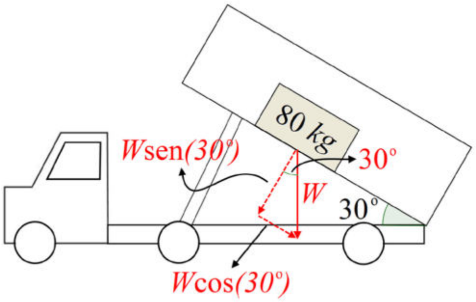
Entonces, para que Manuel levante el carrito debe jalarlo con una fuerza mayor que 117.72 N (suponiendo que la dirección con la que jala no cambia).

V. Llamemos $W$ al peso del refrigerador. Para que el refrigerador se deslice por la caja del camión, la componente de $W$ en la dirección del suelo de la caja debe superar a la fricción estática entre ambas superficies.

La fricción está dada por

$$fr = \mu N$$

Donde $\mu$ es el coeficiente de fricción entre ambas superficies y $N$ es la magnitud de la fuerza normal que el refrigerador ejerce sobre la caja. Ahora bien, $N$ será igual a la componente de $W$ en la dirección perpendicular a la superficie de la caja; mira la figura:




De acuerdo con lo que se acaba de argumentar, $N = W\cos 30° = 80(9.81)\cos 30°$. Esto significa que la fricción entre ambas superficies será

$$fr = \mu N = 0.6\left[80(9.81)\cos 30°\right] = 407.79 \text{ N}$$

Por otro lado, la componente de $W$ en la dirección de la superficie de la caja será

$$W \operatorname{sen} 30° = 80(9.81)\operatorname{sen} 30° = 392.4 \text{ N}$$

De manera que no será suficiente para vencer la fricción entre las dos superficies, y el refrigerador no se deslizará con esa inclinación de la caja.

VI. Para que el deslizamiento tenga lugar, debe ocurrir que

$$fr = W\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Por los argumentos del problema anterior, esto se puede reescribir como

$$\mu W \cos\theta = W\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Dividiendo ambos lados entre $W$ se tiene

$$\mu \cos\theta = \mathrm{sen}\,\theta$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \mu = \tan\theta$$

En el último paso se ha empleado una identidad trigonométrica que establece que la razón tangente de un ángulo es igual a la razón seno dividida entre la razón coseno, siempre respecto al mismo ángulo. Si recuerdas las definiciones de las tres razones, no debería serte difícil demostrar porqué es así. Por último, despejamos el ángulo $\theta$ y queda

$$\theta = \tan^{-1}\mu$$

Sustituyendo el valor del coeficiente de fricción, se tiene

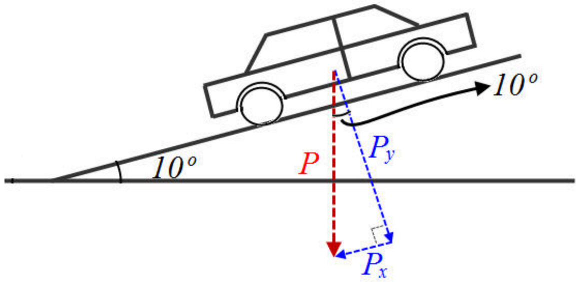
$$\theta = \tan^{-1} 0.6 = 30.96°$$

lo que significa que cuando el ángulo supere los 30.96°, el refrigerador comenzará resbalar hacia abajo.

## Actividad 21

La componente que va en la dirección de la superficie de la rampa es 50 000 sen 10°.

La que va en la dirección perpendicular a dicha superficie es 50 000 cos 10°. Este es un dibujo de la situación (no está a escala):




En equilibrio

## Actividad 22

I. Una báscula mide la masa de los objetos que se colocan sobre ella.

## Actividad 23

I. Como el trabajo $W$ se calcula mediante la expresión $W = Fd$, si la fuerza que se está aplicando no hace que el objeto se desplace, entonces $d$ vale cero y por lo tanto el trabajo realizado es también cero. Es por eso que los pasajeros no realizan ningún trabajo, desde el punto de vista de la Física.

II. Los resultados dependerán de las medidas que tomes. Para subir las escaleras, ejerces una fuerza hacia arriba con tus piernas, fuerza que va elevando tu cuerpo y que debe ser igual a tu peso (no confundir con tu masa). Para el cálculo del trabajo, únicamente se toma en cuenta el desplazamiento que ocurre en la misma dirección que la fuerza aplicada. Es por ello que solo necesitas conocer cuánta distancia recorres *hacia arriba* (es decir, no importa si estás subiendo unas escaleras de caracol, o unas escaleras con descanso; sólo importa cuánta distancia *subiste*). El trabajo que realizas será igual al producto de la distancia que subiste, por tu peso.

III. Los resultados dependerán de las medidas que tomes. Conociendo el trabajo que realizas para llegar hasta la parte superior de las escaleras, y el tiempo que te toma llegar hasta ahí desde el piso, podrás calcular la potencia que desarrollaste al dividir el trabajo realizado entre el tiempo que te llevó realizarlo.

IV. Como el trabajo realizado se calcula con $W = Fd$, y se requiere una fuerza mayor para impulsar el tren lleno que cuando está vacío, el trabajo realizado también será mayor cuando el tren está lleno.

V. Roberto debe ejercer con sus piernas una fuerza igual a su peso, más el de su mochila, para poder subir las escaleras hasta el piso en el que está su departamento. Supongamos que ese piso está a una altura h sobre el suelo. Entonces el trabajo realizado por Roberto será

$$W_R = Fd = w_R h = (70+6)(9.81)h = 745.56h$$

en donde hemos usado $w_R$ (con minúscula) para representar el peso del joven con su mochila. De un modo similar, el trabajo que realizará Claudia será

$$W_C = Fd = w_C h = (50+5)(9.81)h = 539.55h$$

Así que Roberto realiza más trabajo que Claudia para subir hasta su departamento. Por otro lado, como Roberto sube en 35 segundos, la potencia que desarrollará será

$$P_R = \frac{W_R}{t} = \frac{745.56}{35} = 21.30 \text{ W}$$

Mientras que para Claudia la potencia será:

$$P_C = \frac{W_C}{t} = \frac{539.55}{25} = 21.58 \text{ W}$$

de manera que ella desarrolla una potencia ligeramente mayor que la de su vecino.

VI. Aunque realizan fuerza para mantener las mochilas sobre el suelo, éstas no se mueven en la dirección de dicha fuerza (las mochilas se mueven en dirección horizontal mientras que la fuerza es vertical), por lo que el trabajo realizado por ambos sobre sus mochilas es cero.

VII. Este tren sufrirá una aceleración $a = \frac{-20}{5} = -4 \text{ m/s}^2$ (negativa porque su velocidad disminuye, no aumenta). Aplicándole la ecuación correspondiente a un movimiento uniformemente acelerado, con una posición inicial $d_0 = 0$, tendremos:

$$d = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + d_0$$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{2}(-4)(5)^2 + 20(5) = 50 \text{ m}$$

Así que recorrerá 50 m antes de detenerse por completo.

Por otro lado, podemos obtener la fuerza que ejercen los frenos si recordamos que la potencia se define como trabajo realizado por unidad de tiempo,

$$P = \frac{W}{t}$$

El trabajo, a su vez, es la fuerza aplicada por la distancia a lo largo de la cual actúa dicha fuerza; entonces,

$$P = \frac{W}{t}$$

$$\Rightarrow Pt = W$$

$$\Rightarrow Pt = Fd$$

$$\Rightarrow F = \frac{Pt}{d} = \frac{8\ 000\ 000(5)}{50} = 800\ 000 \text{ N}$$

VIII. La componente de la fuerza que actúa en la dirección del movimiento (que es hacia adelante) es

$$F_{Mx} = F_M \cos 30°$$

Así que el trabajo que realiza Manuel será

$$W_M = 13 \cos 30°(24) = 270.20 \text{ J}$$

aproximadamente.

## Actividad 24

Recordemos que la fricción está dada por

$$fr = N$$

donde $\mu$ es el coeficiente de fricción entre los neumáticos y la superficie de la rampa, mientras que $N$ es la magnitud de la fuerza normal; si recuerdas, esta última es la componente del peso del vehículo perpendicular a la superficie de la rampa. En la actividad 21 de esta unidad calculaste su magnitud: 50 000cos10°. Esto significa que la fricción es

$$fr = 0.3(50\ 000\cos 10°)$$

Por lo tanto, el trabajo que esta fricción efectúa sobre el automóvil a lo largo de una distancia $d$ queda expresado como

$$W_{fr} = fr \cdot d = 0.3(50\ 000\cos 10°) \cdot d$$

## Actividad 25

I. Si el balón tuviera una masa de 400 gr (esa no es la masa reglamentaria, ¡debes averiguarla!) Si su velocidad es de 20 m/s, su energía cinética será $k = \frac{1}{2}(0.4)(20)^2 = 80$ J .

II. Como la energía cinética sólo depende de la masa del objeto y de la velocidad con la que se desplaza, y como en ambos casos el cuerpo involucrado eres tú, resulta que para alcanzar esa energía cinética debes caer de modo que al llegar al suelo lo hagas con la misma velocidad que se propone en el enunciado (7 m/s).

Para saber desde qué altura debes caer para alcanzar esa velocidad al llegar al suelo, supón que durante la caída sólo actúa sobre ti la aceleración de la gravedad, que además, por definición de aceleración, es igual a tu incremento de velocidad entre el tiempo en el que ocurre ese incremento:

$$9.81 = \frac{\text{Incremento en la velocidad}}{t}$$

Supón que al caer tu velocidad inicial es cero; entonces el incremento en velocidad será simplemente la velocidad que alcances al final de la caída, la cual queremos que valga 7 m/s:

$$9.81 = \frac{7}{t}$$

Al despejar el tiempo tenemos

$$t = \frac{7}{9.81} = 0.71 \text{ s}$$

aproximadamente. Entonces tu caída debe durar 0.71 segundos; para averiguar desde que altura debes caer para que eso ocurra, emplea la ecuación del movimiento rectilíneo uniforme,

$$d = \frac{1}{2}at^2 + v_o t + d_0$$

Supón de nuevo una velocidad inicial cero, y coloca tu sistema de referencia de modo que la posición inicial también sea cero. Tomando la dirección hacia abajo como positiva, tendremos

$$d = \frac{1}{2}(9.81)(0.71)^2 = 2.50 \text{ m}$$

Así que debes caer desde una altura de 2.50 m para alcanzar la misma energía cinética que tendrías si estuvieras corriendo a 7 m/s.

III. Al convertir los 10 km/h a m/s, se obtiene que equivalen aproximadamente a 2.78 m/s. El automóvil tendrá entonces una energía cinética de

$$k_a = \frac{1}{2}(1\ 000)(2.78)^2 = 3\ 864.2 \text{ J}.$$

140 km/h equivalen a unos 38.89 m/s, por lo que el balón tendrá una energía cinética de $k_p = \frac{1}{2}(0.400)(38.89)^2 = 302.49 \text{ J}$.

IV. La masa de la Tierra es de aproximadamente $5.97 \times 10^{24}$ kg (revisa la cápsula sobre "notación científica" en la sección 2.6 Recapitulación). El radio de su órbita es de 150 000 000 km, así que si suponemos que se trata de una órbita circular, su longitud es de aproximadamente $2\pi(150\ 000\ 000\ 000) = 9.42 \times 10^{11}$ m.

Como tarda un año (31 536 000 segundos) en recorrerla, su velocidad lineal es aproximadamente $v = \frac{9.42 \quad 10^{11}}{31\ 536\ 000} = 29\ 870.62 \text{ m/s}$. Entonces su energía cinética es alrededor de $k = \frac{1}{2}(5.97 \quad 10^{24})(29\ 870.62)^2 = 2.66 \quad 10^{33} \text{ J}$.

V. La energía cinética original es

$$k = \frac{1}{2}mv^2$$

Cuando la velocidad aumenta al doble, la energía cinética pasa a ser

$$k = \frac{1}{2}m(2v)^2 = \frac{1}{2}m4v^2 = 4\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

es decir, cuando la velocidad aumenta al doble, la energía cinética lo hace al cuádruple.

VI. Como la energía cinética depende de la velocidad del objeto, y esta a su vez depende del sistema de referencia desde el cual se le esté observando, resulta que la energía cinética también depende del sistema de referencia en el cual se esté trabajando. Tanto tú como tu amigo tienen razón, siempre que dejen bien claro de qué sistema de referencia están hablando.

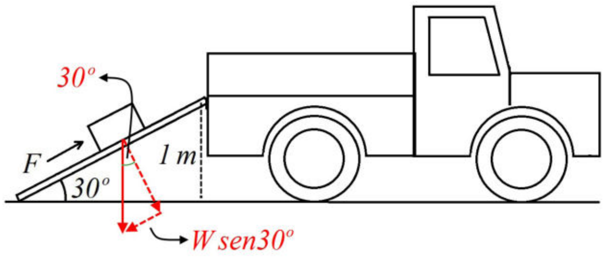
## Actividad 26

De acuerdo con lo afirmado en la sección, y usando unidades del SI, esta energía cinética será $k = \frac{1}{2}(50\ 000 \text{ kg})(22.22 \text{ m/s})^2 = 123\ 432\ 100 \text{ J}$.

## Actividad 27

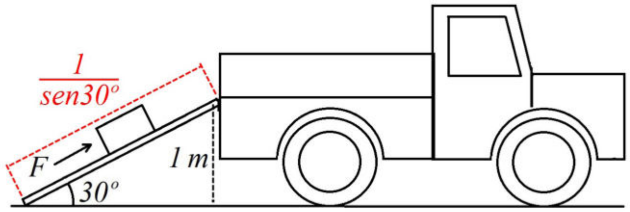
I. Levantar el bloque verticalmente implica ejercer sobre él una fuerza hacia arriba mayor a su peso *p*, que es de $p = mg = 100(9.81) = 981\ \text{N}$.

II. Para empujarlo por una rampa, la fuerza necesaria es sólo la componente de su peso en la dirección de la rampa. Si $W$ es el peso del bloque, esta componente vale $W\,\text{sen}\,30° = 100(9.81)\,\text{sen}\,30° = 490.5\ \text{N}$.




III. Llamemos $T$ al trabajo efectuado; en el primer caso, Mario ejercerá su fuerza a lo largo de 1 metro (la altura a la que debe levantar el bloque). El trabajo será simplemente $T = 981(1) = 981$ J.

En el segundo caso, la fuerza será menor (será sólo la componente paralela a la rampa) pero se ejercerá a lo largo de una distancia más larga, $\dfrac{1}{\text{sen}\,30°} = 2\ \text{m}$. El trabajo será $T = 490.5(2) = 981\ \text{J}$.




Así que en ambos casos, el trabajo realizado es el mismo, pero con la rampa la fuerza necesaria es menor.

IV. La energía potencial del bloque sólo depende de la altura a la que se encuentre (desde un nivel de referencia que aquí será el suelo). Valdrá $U = 100(9.81)(1) = 981$ J.

Date cuenta que la energía potencial es simplemente el trabajo realizado para llevar al bloque hasta esa altura.

V. La energía potencial del elevador en la planta baja se puede tomar como cero; al subir al quinto piso, será de $U = 700(9.81)(15) = 103\ 005\ \text{J}$.

VI. La energía potencial del elevador en el segundo piso sería de $U = 799(9.81)(6) = 41\ 202$ J, lo cual representa una disminución de 61 803 J respecto a su energía potencial en el quinto piso.

VII. La energía potencial del elevador en el séptimo piso es de $U = 700(9.81)(21) = 144\ 207$ J. Eso representa un aumento de 103 005 J respecto a la que tenía en el segundo piso.

VIII. En la planta baja, su energía potencial se tomó como cero, así que llegar ahí desde el séptimo piso representa una disminución en la energía potencial de 144 207 J.

IX. Si el elevador lleva esa carga, la masa que deberá mover será de $700 + 50 + 72 + 30 = 852$ kg. Entonces llegar al quinto piso desde la planta baja significará un incremento en la energía potencial de $U = 852(9.81)(15) = 125\ 371.8$ J.

En el segundo piso la energía potencial será $U = 852(9.81)(6) = 50\ 148.72$ J, que significa una disminución de –75 223.08 J respecto a la que tenía en el quinto piso.

En el séptimo piso, su energía potencial será $U = 852(9.81)(21) = 175\ 520.52$ J. Al llegar ahí desde el segundo piso, la energía potencial aumenta en 125 371.8 J.

Para regresar a la planta baja desde el séptimo piso, la energía potencial disminuirá en 175 520.52 J.

X. Tu energía potencial es $U = mgh$, donde $m$ es tu masa y $h$ es la altura a la que subiste. Si subes al doble de altura, será $u = mg(2h) = 2(mgh)$, es decir, tendrás también el doble de energía potencial.

XI. Si tu masa es m y el niño tiene la mitad de esa masa, su energía potencial será $U = \left(\frac{1}{2}m\right)gh = \frac{1}{2}(mgh)$, es decir, tendrá la mitad de tu energía potencial.

## Actividad 28

I. La energía cinética del auto es de $k = \frac{1}{2}(800)(27.78)^2 = 308\ 691.36$ J (toma en cuenta que 100 km/h equivalen a aproximadamente 27.78 m/s).

II. Cuando el auto se haya detenido, su velocidad (y su energía cinética) será igual a cero. Eso quiere decir que su energía cinética disminuirá en 308 691.36 J. Gracias al teorema trabajo-energía, sabemos que el trabajo realizado por la fricción será igual a esos 308 691.36 J.

III. El teorema trabajo-energía establece en este caso que

$$Fd = 308\ 691.36$$

donde $F$ es la fuerza que detiene al auto y $d$ es la distancia a lo largo de la cual actúa. La fuerza es la debida a la fricción, $F = \quad N = 0.8(800)(9.81) = 6\ 278.4$ N. Sustituimos en la expresión anterior y despejamos $d$ para obtener

$$d = \frac{308\ 691.36}{6\ 278.4} = 49.17 \text{ m}$$

IV. Podemos emplear la segunda ley de Newton para escribir

$$F = ma$$

donde $F$ es la fuerza que detiene al auto y $m$ es su masa. Sustituimos los valores que conocemos y despejamos $a$; queda

$$a = \frac{6\ 278.4}{800} = 7.85 \text{ m/s}^2$$

V. Que las llantas se calienten significa que no toda la energía se emplea en detener al auto, así que el calentamiento tiene el efecto de alargar la distancia real que le toma detenerse.

VI. El teorema trabajo-energía (y el hecho de que la energía cinética final del auto es cero, pues terminó completamente detenido) nos permiten escribir

$$\frac{1}{2}mv^2 = Fd$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = (\mu N)d$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = (\mu[mg])d$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = \mu gd$$

En el último paso hemos dividido ambos lados de la ecuación entre m. Despejamos $v$ y tenemos

$$v = \sqrt{2\ \ gd}$$

Ahora bien, todas las cantidades del miembro derecho son conocidas: $\mu$ es el coeficiente de fricción entre el pavimento y las llantas, $g$ es la aceleración de la gravedad, y $d$ es la distancia que el carro patinó antes de detenerse (conocida por las marcas que dejaron los neumáticos). Hacemos las sustituciones correspondientes y obtenemos

$$v = \sqrt{2(0.8)(9.81)(20)} = 17.72 \text{ m/s}$$

que pueden convertirse en km/h si empleamos las técnicas de la sección 1.2 Convirtiendo unidades:

$$17.72\frac{\text{m}}{\text{s}}\quad\frac{3\ 600\text{ s}}{1\text{ h}}\quad\frac{1\text{ km}}{1\ 000\text{ m}} = 63.79\text{ km/h}$$

de modo que el auto se movía dentro del límite de velocidad permitido.

Respecto al efecto del calentamiento por fricción en tus resultados, toma en cuenta que su presencia hace que no toda la energía se consuma en detener al automóvil cuando ocurre el frenado: una fracción de ella se gastará en dicha elevación de la temperatura, por lo que al tomarla en cuenta, nuestros cálculos deberían arrojar una velocidad inicial ligeramente mayor a la que encontramos.

VII. No es necesario que cada cumbre sea más baja que la anterior, mientras la primera sea la más alta de todas. La primera cumbre determinará la energía mecánica del carrito, que –salvo las pérdidas por fricción y calentamiento– le hará superar cualquier cumbre que sea más baja que esa primera.

VIII. La conservación de la energía implica que (ignorando pérdidas por fricción y calentamiento) toda la energía potencial que el carrito adquiere al subir a la primera cresta esta energía se convertirá en energía cinética, cuando el carrito llegue al punto más bajo de la montaña. Es decir,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = gh$$

Al despejar $v$ se tiene

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.81)(64)} = 35.43 \text{ m/s}$$

IX. Como la masa no aparece en la expresión anterior para la velocidad del carrito, no importa si va vacío o lleno de gente, su velocidad al llegar a la parte más baja será la misma.

X. La energía potencial será máxima en el punto más alto de la trayectoria. La energía cinética alcanzará su máximo valor cuando el objeto acaba de ser disparado y luego, en el instante antes de tocar el suelo de regreso.

XI. La energía potencial del péndulo es máxima en los puntos donde su movimiento se detiene momentáneamente, para invertir su dirección. La energía cinética tendrá su máximo valor cuando el péndulo se encuentra entre ambas posiciones, pues en ese momento su velocidad es mayor.

XII. Como ya hemos discutido, las fuerzas de acción y reacción actúan sobre cuerpos diferentes, por lo que no se pueden sumar para constituir una fuerza neta igual a cero, y por la misma razón, el trabajo que Manuel ejercerá sobre el remolque tampoco será cero.

XIII. La masa de la pelota de esponja es bastante menor que la de boliche; si sus energías cinéticas son iguales, entonces la velocidad de la pelota de esponja debe ser mucho mayor que la de la bola de boliche (recuerda la expresión para la energía cinética).

XIV. Por el teorema trabajo-energía, sabemos que el trabajo necesario para detenerlas será el mismo.

XV. El trabajo realizado por Miguel es $W_M = 20(6) = 120$ J.
El que realiza Canek es $W_C = 10(12) = 120$ J.
Entonces ambos realizan la misma cantidad de trabajo sobre sus cajas.

XVI. Por el teorema trabajo-energía, los dos le comunican la misma energía cinética a sus cajas.

## Actividad 29

Con las suposiciones especificadas en el texto, las dos fuerzas que realizan trabajo sobre el vehículo son la fricción y la componente de su peso paralela a la superficie de la rampa.

La fricción es $fr = 50\ 000(9.81)\cos 10°(0.3)$.

La componente del peso paralela a la superficie de la rampa es $W_x = 50\ 000(9.81)\operatorname{sen} 10°$.

Dado que ambas actúan en la misma dirección (oponiéndose al movimiento del carro), la fuerza neta que actúa sobre el vehículo es la suma de ellas dos.

El teorema trabajo-energía afirma que el trabajo que realicen será igual al cambio en la energía cinética del automóvil.

## Construyendo la rampa de emergencia

I. La energía cinética de un camión de carga de 50 toneladas que se mueve a 80 km/h es

$$k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(50\ 000)(22.22)^2 = 12\ 343\ 210 \text{ J}$$

(los 80 km/h se han convertido primero a m/s; equivalen a 22.22 m/s).

El teorema trabajo-energía establece que la fricción, junto a la componente del peso del camión paralelo a la superficie de la rampa, deberán realizar sobre el vehículo un trabajo cuya magnitud sea igual a la energía que acabamos de calcular. Es decir,

$$W_{fr} + W_p = k$$

Donde $W_{fr}$ representa al trabajo realizado por la fricción, y $W_p$ al realizado por la componente del peso paralelo a la superficie de la rampa. Sabemos además que, si $d$ es la distancia que el camión recorrerá antes de detenerse, entonces

$$W_{fr} = fr(d) = 50\ 000(9.81)\cos 10°(0.3)(d)$$

y también que

$$W_p = p_x(d) = 50\ 000(9.81)\operatorname{sen} 10°(d)$$

Sustituyendo todo esto en $W_{fr} + W_p = k$, tendremos

$$50\ 000(9.81)\cos 10°(0.3)(d) + 50\ 000(9.81)\operatorname{sen} 10°(d) = 12\ 343\ 210$$

Factorizamos la distancia $d$,

$$\left[50\ 000(9.81)\cos 10°(0.3) + 50\ 000(9.81)\operatorname{sen} 10°\right]d = 12\ 343\ 210$$

Y la despejamos:

$$d = \frac{12\ 343\ 210}{50\ 000(9.81)\cos 10°(0.3) + 50\ 000(9.81)\operatorname{sen} 10°}$$

Lo cual da como resultado

$$d = 53.64 \text{ m}$$

Es decir, la longitud mínima que detendrá un camión de carga de 50 toneladas que llega a la rampa con una velocidad de 80 km/h es de 53.64 m, aproximadamente.

II. Si la rampa se construyera sin pendiente, la componente del peso paralelo a su superficie desaparecería; además, la fuerza normal se convertiría simplemente en el peso del camión. Entonces, la única fuerza responsable de detener el vehículo sería la fricción. En ese caso, el teorema trabajo-energía nos daría

$$W_{fr} = k$$

De un modo similar a lo realizado en el inciso anterior, esto se convierte en

$$50\ 000(9.81)(0.3)(d) = 12\ 343\ 210$$

Y al despejar $d$ se tiene

$$d = \frac{12\ 343\ 210}{50\ 000(9.81)(0.3)} = 83.88 \text{ m}$$

Lo que significa que para detener el camión con una rampa sin pendiente, ésta debería tener por lo menos 83.88 m de longitud.

La lista de cotejo, con los valores y respuestas que deberías encontrar, se presenta a continuación:

| **Elementos de la solución** | |
|---|---|
| Expresaste todas las cantidades involucradas usando el mismo sistema de unidades (es decir, las expresaste todas usando kilogramos-metros-segundos, o todas usando kilogramos-kilómetros-horas). | En esta ocasión lo conveniente sería expresar todo en metros y segundos. |
| Empleaste los parámetros correctos (velocidad máxima permitida, peso máximo de un vehículo que llegue a la rampa) necesarios para determinar la longitud mínima de la rampa. | La velocidad máxima es de 80 km/h, de acuerdo con lo que dice el problema.<br>El peso máximo sería el del camión con carga: 50 toneladas (50 000 kg). |
| Determinaste la energía cinética de un vehículo que llega a la rampa de emergencia a la velocidad máxima permitida. | La energía cinética de un vehículo de las características anteriores sería de 12 343 210 J. |
| En el caso de que la rampa se construya con pendiente, descompusiste el peso del vehículo en dos componentes, una paralela a la superficie de la rampa y la otra perpendicular a ella. | La componente paralela a la superficie de la rampa está dada por<br>$W_x = 50\ 000 \operatorname{sen} 10°$<br>Mientras que la componente perpendicular a la superficie de la rampa sería<br>$W_y = 50\ 000 \cos 10°$ |
| Determinaste el valor de la fuerza de fricción que se opone al movimiento del vehículo al entrar a la rampa. | $fr = \ N$<br>$= 0.3(50\ 000 \cos 10°)$<br>$= 14\ 772.12 \text{ N}$ |

(*Continúa...*)

(*Continuación...*)

| Elementos de la solución | |
|---|---|
| En el caso de que la rampa se construya con pendiente, determinaste la otra fuerza que, junto con la fricción, se opone al movimiento del vehículo al entrar a la rampa. | La otra fuerza que se opone al movimiento es la componente del peso del vehículo paralela a la superficie de la rampa. |
| Expresaste correctamente el trabajo que realizan sobre el vehículo las fuerzas que se oponen a su movimiento. | Con pendiente, ese trabajo es $(fr + W_x)d$. Sin pendiente, es $fr \cdot d$. |
| Empleaste el teorema trabajo-energía para escribir una ecuación que relaciona la energía cinética del vehículo con las fuerzas que se oponen a su movimiento. | En el caso de rampa con pendiente, sería $\frac{1}{2}mv^2 = (fr + W_x)d$ Sin pendiente, se reduciría a $\frac{1}{2}mv^2 = fr \cdot d$ |
| Determinaste la distancia a lo largo de la cual deben actuar estas fuerzas para lograr detener el vehículo, en caso de que la rampa se construya con pendiente. | 53.64 m |
| Determinaste la distancia a lo largo de la cual deben actuar estas fuerzas para lograr detener el vehículo, en caso de que la rampa se construya sin pendiente. | 83.88 m |

## ¿Ya estoy preparado(a)?

Es particularmente importante que te esfuerces en obtener por tu cuenta las siguientes respuestas, y que comprendas porqué son correctas. De lo contrario, no estarás desarrollando las habilidades que necesitas para aprobar el módulo.

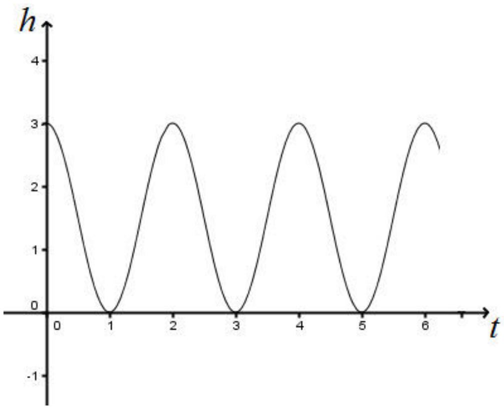
1. La gráfica A corresponde a un movimiento acelerado en el que la velocidad del móvil disminuye continuamente.
   La gráfica B corresponde a un movimiento uniforme. La velocidad no se incrementa ni disminuye.
   La gráfica C corresponde a un movimiento uniforme.
   La gráfica D corresponde a un movimiento acelerado en el que la velocidad se incrementa constantemente.
   La gráfica E corresponde a un movimiento uniforme.
   La gráfica F corresponde a un movimiento acelerado en el que la velocidad disminuye constantemente.
2. Las tablas y gráficas se corresponden como se indica a continuación:

| | |
|---|---|
| Gráfica A | $d = 4t^2 + 20$ |
| Gráfica B | $d = 4t$ |
| Gráfica C | $d = 10t + 6$ |
| Gráfica D | $d = 7t^2$ |
| Gráfica E | $d = 5t + 10$ |
| Gráfica F | $d = 4t^2 + 8t + 3$ |

a) La velocidad inicial es de 8 m/s.
b) El tiempo en que alcanza su altura máxima es de 2 segundos.
c) La aceleración es de 7 m/s$^2$.
d) Esa distancia es de 175 m.
e) Su velocidad es de 10 m/s.
f) Ese tiempo es de 2.4 s.
g) 2 s.
h) 7.5 m.
i) 20 m.
j) 1.58 s, aproximadamente.
k) 5 s.
l) Su aceleración es cero.

3. La ecuación que describe este movimiento es $h = 1.5\cos(\pi\, t) + 1.5$. Nota que se requiere sumar un 1.5 a la ecuación, para que la altura efectivamente esté midiéndose desde la posición más baja del péndulo.

   a) La frecuencia es de 0.5 Hz.
   b) La amplitud vale 1.5 cm.
   c) Su gráfica es la que se muestra en la figura:




4. a) 88 días.
   b) 0.4 UA, o 60 millones de kilómetros.
   c) $d = 0.4\,\text{sen}\left(\dfrac{2\pi}{88}t\right)$
   d) La velocidad tangencial es de 178 267 km/h.
5. a) 0.13 m/s$^2$.
   b) 16.64 J.
   c) El teorema trabajo-energía afirma que la energía cinética perdida por el balón debido a la fricción será igual al trabajo efectuado por dicha fuerza sobre

el balón, es decir, el balón perderá 16.64 J de energía cinética a causa de la fricción.

6. La fuerza deberá tener una magnitud de aproximadamente 8.71 N, y una dirección $\alpha = 77.41°$.
7. a) $6.867 \times 10^{10}$ J.
   b) $6.77 \times 10^{10}$ J.
   c) $2.26 \times 10^{8}$ N.
   d) $645.71$ m/s$^2$. Incidentalmente, esa aceleración es muy superior a la que podría soportar un cuerpo humano.

# Apéndice 2

## La consulta de fuentes de información en Internet

La información es un punto nodal para la sociedad de hoy. Diferenciarla, manejarla y utilizarla son acciones básicas para nosotros los miembros de la sociedad del siglo XXI y por ello hay que acercarse a ella. Saber qué hacer es el primer paso.

La información se define como el conjunto de datos sobre algún fenómeno determinado; se obtiene de diversas formas, como la observación o la búsqueda intencionada. En el primer caso es natural pero en el segundo no. Para aprender se utilizan las dos pero para estudiar se usa principalmente la segunda.

La información se obtiene de fuentes primarias y secundarias, escritas, orales y visuales, mediante medios impresos, electrónicos y personales. El conjunto de datos por obtener es tan amplio que después de obtenidos se deben analizar, pues no todo lo percibido o encontrado es certero y confiable y tampoco responde de manera puntual al objeto de estudio.

En estos días es común el acceso a la información a través de Internet o red global de información a la que se llega y se mantiene por medio de computadoras. Son millones y millones de datos, documentos, imágenes, fotografías lo que se almacena y a lo que uno tiene acceso. Por eso, diferenciar entre una buena información y la información basura es difícil. Los siguientes son algunos consejos o recomendaciones para guiar tu búsqueda.

1. Para distinguir el valor de la información para ti debes planear el objetivo antes de comenzar a buscar. Los siguientes criterios de búsqueda pueden ayudarte: ¿qué voy a buscar?, ¿qué quiero saber de lo que voy a buscar?, ¿para qué lo estoy buscando?
2. Es muy importante que no busques saber TODO de un tema. Entre más específica sea tu búsqueda, mayor oportunidad tienes de encontrar rápida y fácilmente la información. Puedes caer en dos errores:
   a) Especificar demasiado las cosas.
   b) Dejar sin especificar las cosas.
3. Define qué sabes. Para comenzar a investigar hay que partir de tus conocimientos previos. Lo que ya conoces te servirá para realizar tu investigación y para diferenciar datos correctos de los incorrectos, los útiles de los inútiles.
   a) Asegúrate que la información que tú conoces previamente es correcta.
   b) Asegúrate que la información que es actual.
   c) Recuerda que, aunque no sepas del tema, sí sabes cómo comenzar a buscarlo.
4. Decide dónde y cómo vas a buscar.
5. Pregúntate: ¿qué palabras voy a utilizar?, ¿qué criterios de búsqueda? Tienes que enlistar las palabras clave para tu búsqueda. Conforme avances, agrega más palabras clave.

6. Planea la búsqueda de acuerdo a tu nivel de conocimientos: vas a investigar algo muy básico o más avanzado. Los mejores lugares para comenzar a informarte son diccionarios, enciclopedias, las lecturas sugeridas en los libros de texto, las páginas de Internet "oficiales" (aquellas del gobierno, de las organizaciones importantes (como la ONU, la UNICEF), páginas de universidades de prestigio (como la UNAM, el IPN) Estas páginas "oficiales" tienen CONTROL sobre sus contenidos por lo que la información encontrada, aunque puede ser subjetiva (que depende de un punto de vista), es la "oficialmente correcta".

   Es muy importante que pongas MUCHA ATENCIÓN en tus primeras lecturas. Debes encontrar información correcta. Para ello es necesario que compares los datos obtenidos entre sí.
7. Busca y consulta la información utilizando un buscador (el que te va a encontrar dónde, de todo el Internet, está tu tema).

   Algunos buscadores son:

   - mx.yahoo.com
   - www.google.com.mx
   - mx.altavista.com

   Si quieres noticias probablemente las encuentres en:

   - www.bbc.co.uk/mundo/index.shtml
   - mx.reuters.com
   - mx.news.yahoo.com

   Si buscas libros los puedes encontrar (además de en una librería) en:

   - books.google.es
   - www.booksfactory.com/indice.html
   - www.ucm.es/BUCM/atencion/25403.php

   Si lo que deseas son diccionarios:

   - rae.es/rae.html
   - www.diccionarios.com
   - www.elmundo.es/diccionarios

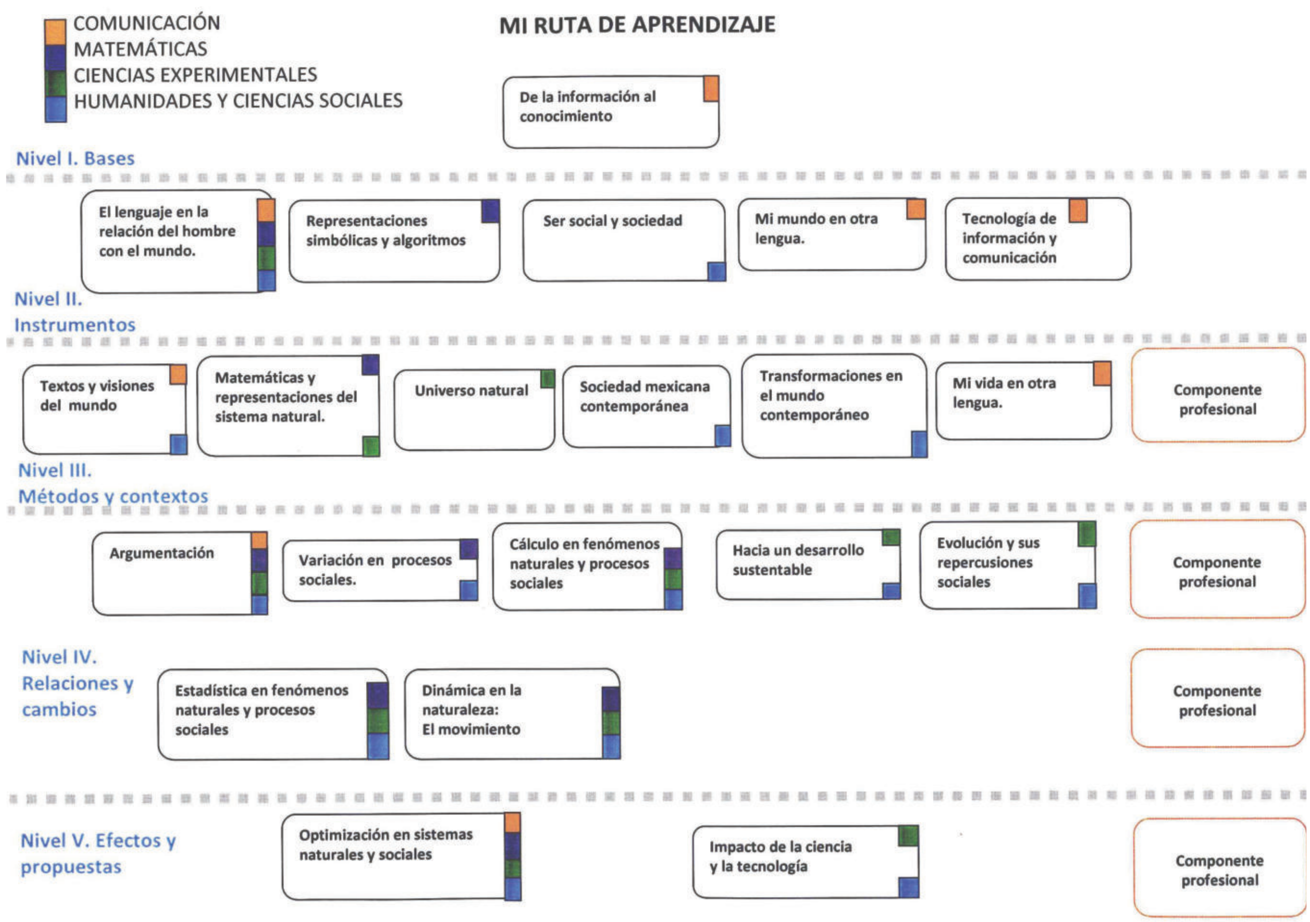
   ¿Qué opciones del buscador me conviene utilizar?
   Los buscadores presentan algunas opciones tales como:

   - Opciones de Búsqueda: Incluye "buscar videos", "buscar imágenes", "buscar noticias", "búsqueda en español", "búsqueda en México" etc. Lo que hacen es especificar tu búsqueda.
   - Dentro de "búsqueda avanzada" podrás elegir cómo preferirías que te ayudara a buscar. Utilizando las opciones de: "*buscar con las palabras*" y "*que no contenga las palabras*" puedes hacer tu búsqueda aún más pequeña y te será más fácil encontrar lo que quieres.

8. Una vez obtenida la información: analiza. Los puntos más importantes ahora son: ¿es lo que necesito?, ¿qué tan bueno es el contenido?, ¿qué tan confiable es el autor?, ¿cuáles son algunos lugares de donde viene la información?

Rodrigo Zepeda Tello. "Guía básica para el manejo de Internet", en Liliana Almeida *et al*. (2011). *Ciencia Contemporánea ¿Para qué?* México: Edere/Esfinge, pp. 142-148.

# Apéndice 3



COMUNICACIÓN
MATEMÁTICAS
CIENCIAS EXPERIMENTALES
HUMANIDADES Y CIENCIAS SOCIALES
MI RUTA DE APRENDIZAJE
De la información al conocimiento
Nivel I. Bases
El lenguaje en la relación del hombre con el mundo.
Representaciones simbólicas y algoritmos
Ser social y sociedad
Mi mundo en otra lengua.
Tecnología de información y comunicación
Nivel II. Instrumentos
Textos y visiones del mundo
Matemáticas y representaciones del sistema natural.
Universo natural
Sociedad mexicana contemporánea
Transformaciones en el mundo contemporáneo
Mi vida en otra lengua.
Componente profesional
Nivel III. Métodos y contextos
Argumentación
Variación en procesos sociales.
Cálculo en fenómenos naturales y procesos sociales
Hacia un desarrollo sustentable
Evolución y sus repercusiones sociales
Componente profesional
Nivel IV. Relaciones y cambios
Estadística en fenómenos naturales y procesos sociales
Dinámica en la naturaleza: El movimiento
Componente profesional
Nivel V. Efectos y propuestas
Optimización en sistemas naturales y sociales
Impacto de la ciencia y la tecnología
Componente profesional

# Apéndice 4

## Proporcionalidad

### *Razones*

En Matemáticas y en Física, es importante poder comparar diferentes magnitudes.

Considérese por ejemplo, una casa que tiene 3 metros de altura, y una maqueta de esa casa, cuya altura es sólo de 30 centímetros. Una forma de comparar ambas magnitudes es mediante una división,

$$\frac{\text{Altura real de la casa}}{\text{Altura de la maqueta}} = \frac{3\text{ m}}{0.3\text{ m}} = 10$$

Lo cual significa simplemente que la casa real es 10 veces más alta que su maqueta. Esta forma de comparar dos magnitudes se conoce como "razón", y en este caso, se dice que la razón de la altura real a la altura de la maqueta es de 10.

También podríamos comparar la estatura de un padre (1.70 m) con la de su hijo (0.80 m) y decir que la razón de la estatura del padre a la del hijo es

$$\frac{1.70\text{ m}}{0.80\text{ m}} = 2.125$$

De modo que la estatura del padre es 2.125 veces la del hijo.

Las razones permiten comparar magnitudes muy diversas, no solo alturas de objetos y estaturas de personas: el salario de un obrero con el de un alto ejecutivo, la duración de un programa de TV con las de los anuncios comerciales que se transmiten durante el mismo, el peso que puede levantar un ser humano con el que es capaz de levantar una grúa, las posibilidades son innumerables.

Así, el empleo de razones para comparar diferentes cantidades puede ser muy útil; además, está detrás de una importante idea matemática, la proporcionalidad.

### *Proporcionalidad directa*

Volvamos al caso de la casa y su maqueta. La razón "altura real"/"altura maqueta" es

$$\frac{3}{0.3} = 10$$

Si la maqueta está construida a escala y de manera correcta, la razón "longitud fachada real"/"longitud fachada maqueta" deberá ser la misma. Es decir, si la fachada real tiene 5 m de longitud, la fachada de la maqueta deberá ser de 50 cm (0.5 m), de modo que

$$\frac{5}{0.5} = 10$$

Es decir,

$$\frac{3}{0.3}=\frac{5}{0.5}$$

Cuando dos razones son iguales, se dice que las cantidades involucradas son proporcionales. En este caso, las dimensiones de la casa real (altura, fachada) son proporcionales a las de la maqueta.

La idea de proporcionalidad, al igual que el concepto de razón (como comparación entre dos magnitudes) aplica a una enorme variedad de situaciones. Por ejemplo, supongamos que el precio del kilo de naranja es de $10 en el mercado más cercano. Si se compra 1 kg, 2 kg, 3 kg,… de estas naranjas, el precio a pagar serán $10, $20, $30,… respectivamente. Con estos datos se puede construir una tabla peso-precio, que quedaría

| Peso (kg) | Precio ($) |
|---|---|
| 1 | 10 |
| 2 | 20 |
| 3 | 30 |
| ⋮ | ⋮ |

Ahora formamos las razones Precio/Peso y tendremos

$$\frac{10}{1}=\frac{20}{2}=\frac{30}{3}$$

lo cual significa simplemente que (como las razones son iguales) el precio a pagar es proporcional al peso de naranja que se esté comprando.

Otro enfoque para comprender la proporcionalidad directa, equivalente al que acaba de presentarse, es decir que dos cantidades serán proporcionales si al aumentar una de ellas al doble, triple, cuádruple,… la otra también aumenta al doble, triple, cuádruple,…

Este último enfoque es particularmente útil en casos como el de las naranjas: si el peso de naranjas aumenta al doble, triple, cuádruple,… entonces el precio a pagar aumentará correspondientemente al doble, triple, cuádruple,…

Un último comentario: se ha afirmado que dos cantidades $x$, $y$ son proporcionales si las razones formadas con parejas correspondientes de esas cantidades son iguales:

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$$

Pero esto se puede escribir también como

$$\frac{x}{y}=k$$

donde $k$ es una constante. Un despeje sencillo lleva de inmediato a

$$x = ky \qquad \text{(a.1)}$$

La expresión (a.1) es una forma compacta de representar la proporcionalidad de dos cantidades. Dos cantidades son proporcionales si responden a una ecuación de la forma (a.1), y viceversa.

## Proporcionalidad inversa

Dos cantidades son inversamente proporcionales si al aumentar una de ellas al doble, triple, cuádruple,… la otra no aumenta sino que disminuye a la mitad, la tercera, la cuarta parte,… respectivamente.

Un ejemplo puede ser el número de invitados a una fiesta de cumpleaños, y la fracción de pastel que le tocará a cada uno: mientras más invitados lleguen a la fiesta, a cada uno le tocará una fracción de pastel menor.

Lo anterior nos permite formar la tabla siguiente:

| Número de invitados | Fracción de pastel que le toca a cada uno |
|---|---|
| 1 | 1 (le toca el pastel entero) |
| 2 | $\frac{1}{2}$ (a cada uno le toca medio pastel) |
| 3 | $\frac{1}{3}$ (a cada uno le toca un tercio de pastel) |
| ⋮ | ⋮ |

Llamemos "$x$" al número de invitados, y "$y$" a la fracción de pastel que le toca a cada uno. Puedes notar que entonces,

$$y = \frac{1}{x}$$

O lo que es lo mismo,

$$xy = 1$$

En general, si dos cantidades $x$, $y$ son inversamente proporcionales, cumplirán con una ecuación de la forma siguiente:

$$xy = k$$

donde $k$ es una constante determinada. Esto se puede expresar también como

$$x = \frac{k}{y} \qquad \text{(a.2)}$$

# Apéndice 5

## Ecuaciones

### *Igualdades*

Una igualdad, como su nombre lo indica, es una expresión que establece que dos cantidades son iguales. Por ejemplo, podemos pensar en igualdades sencillas como

$$2+3=5$$
$$\frac{12}{4}=3$$
$$4=3^2-\frac{10}{2}$$
$$(8-2)4=6(4)$$

Igualdades que como estas son siempre verdaderas, se llaman también identidades. Ahora bien, puede haber igualdades que no siempre sean verdaderas, si en ellas intervienen cantidades cuyo valor no se conoce. Eso nos lleva al siguiente concepto importante: el de ecuación.

### *¿Qué es una ecuación?*

Una ecuación es una igualdad en la que interviene al menos una incógnita (una cantidad cuyo valor no se conoce). Por ejemplo, una ecuación sencilla podría ser

$$x-6=13$$

que es una igualdad según la cual, la cantidad $x-6$ (en donde $x$ es un número que no se conoce) es igual a 13.

La ecuación anterior puede llevar a una igualdad cierta o falsa, dependiendo del valor que se le dé al número desconocido $x$. Por ejemplo, si suponemos que $x$ vale 8, entonces la ecuación se convierte en

$$8-6=13$$

Lo cual es falso. Ahora bien, puede que exista un valor de $x$ que vuelva verdadera la ecuación. Ese valor se llama solución de la ecuación. En este caso, la solución de la ecuación es $x=19$, pues cuando se sustituye ese valor, se obtiene

$$19-6=13$$

Lo cual es verdadero.

Hay que señalar que una ecuación puede tener más de una solución, es decir, puede haber más de un valor de $x$ que la conviertan en una igualdad verdadera.

## Ecuaciones lineales

Las siguientes ecuaciones:

$$x+3=0$$
$$2x-6=8$$
$$3+4x=x-2$$
$$20=5-3x$$

Son ecuaciones lineales. En general, una ecuación se llama lineal si es posible escribirla en la forma

$$ax+b=0 \tag{a.3}$$

donde $a$ y $b$ son números conocidos (llamados constantes) y $x$ es de nuevo la incógnita. Empleando sencillas técnicas algebraicas, las cuatro ecuaciones que se enlistaron arriba se pueden llevar a esa forma. Por ejemplo, la tercera de ellas

$$3+4x=x-2$$

Se puede llevar a la forma (a.3) procediendo como sigue:

| | |
|---|---|
| $3+4x+2=x$ | Se suma 2 a ambos lados de la ecuación |
| $4x+5=x$ | Se efectúa la operación 3 + 2 (se reducen los términos semejantes) |
| $4x+5-x=0$ | Se resta $x$ a ambos lados de la ecuación |
| $3x+5=0$ | Se efectúa la operación $4x-x$ |

En este punto se ha llegado a la forma $ax+b=0$, con $a=3$ y $b=5$.

Las mismas técnicas pueden ayudar a resolver (hallar la solución de) una ecuación lineal. Retomando la ecuación que se acaba de obtener, se resta 5 a ambos lados y queda

$$3x=-5$$

Finalmente, se divide ambos lados entre 3, y se llega a

$$x=-\frac{5}{3}$$

con lo que se ha encontrado el valor de $x$ que vuelve verdadera la ecuación original: $-\frac{5}{3}$. Es decir, la solución de

$$3+4=x-2$$

Es $x=-\frac{5}{3}$.

## Ecuaciones cuadráticas

Una ecuación que mediante técnicas como las ilustradas en el apartado anterior se pueda llevar a la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{a.4}$$

en donde $a$, $b$ y $c$ son constantes mientras que $x$ es la incógnita, se llama ecuación cuadrática.

En ese sentido, las siguientes son ecuaciones cuadráticas:

$$5x^2 - 3 = -14x$$

$$6x - 20 = 2x^2$$

$$2x = x^2 - 3$$

$$x(x+1) = 6$$

$$3x^2 = -18x$$

Resolver una ecuación cuadrática requiere, en general, técnicas diferentes a las empleadas para resolver ecuaciones lineales. Una de ellas es el uso de la llamada fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

cuyo empleo se ilustra en la sección 1.12.3 Algunas técnicas especiales. Otro modo de resolver una ecuación cuadrática es llevarla primero a la forma (a.4) y a continuación factorizarla, es decir, separarla en factores. Ilustraremos el método a continuación:

Tomemos la ecuación

$$x(x+1) = 6$$

Realizamos el producto de la izquierda y tenemos

$$x^2 + x = 6$$

Si a continuación se resta 6 a ambos lados, se llegará a

$$x^2 + x - 6 = 0$$

En este punto, la ecuación ya está en la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Ahora se trata de factorizar la expresión de la izquierda,

$$x^2 + x - 6$$

Es decir, buscar dos factores cuyo producto sea igual a $x^2 + x - 6$. Lograr esa factorización requiere que nos desviemos por un momento de nuestro objetivo y exploremos brevemente la manera en la que se realiza el producto de dos binomios.

## *El producto de dos binomios*

Un binomio es una expresión que consiste en la suma o resta de dos términos, como por ejemplo

$$x + 4$$

$$x + 5$$

Para multiplicar esos dos binomios, cada término del primer binomio debe multiplicar a cada término del segundo; de esta manera, se tendrá

$$(x+4)(x+5) = x^2 + 5x + 4x + 20$$

Lo cual puede simplificarse para quedar

$$(x+4)(x+5) = x^2 + 9x + 20$$

Nótese entonces que el producto de estos dos binomios arroja una expresión que tiene la forma del miembro izquierdo de $ax^2 + bx + c = 0$.

Factorizar esta expresión es en realidad el proceso inverso al que acabamos de realizar: es decir, hallar los factores $x + 4$, $x + 5$ a partir de $x^2 + 9x + 20$.

En otras palabras, sabiendo que los factores tienen la forma

$$x + m,\ x + n,$$

¿cómo hallar el valor de los números $n$ y $m$?

Si se reflexiona un momento en el modo en que el producto se llevó a cabo, será claro que $m$ y $n$ deben hallarse de la siguiente manera: sumados deben dar 9, mientras que multiplicados deben dar 20.

Una breve búsqueda lleva concluir que esos dos números son 5 y 4, de modo que los factores son $x + 5$ y $x + 4$ (cosa que ya sabíamos, pero que ilustra este método de factorización).

**De vuelta a la solución de $x2 + x - 6 = 0$**

La técnica de factorización explorada anteriormente puede aplicarse a la solución de

$$x^2 + x - 6 = 0$$

Se trata ahora de factorizar la expresión de la derecha; por lo discutido arriba, los factores tendrán la forma

$$x + m,\ x + n,$$

donde $n$ y $m$ son dos números que sumados deben dar 1 (¿por qué?), mientras que multiplicados deben dar –6.

Los números son 6 y –1, de modo que la factorización correcta de $x^2 + x - 6$ es $(x + 6)(x - 1)$. Esto significa que

$$x^2 + x - 6 = 0$$

es equivalente a

$$(x + 6)(x - 1) = 0$$

En este punto, hay que comprender lo que se acaba de escribir: el producto de dos cantidades desconocidas, $x + 6$ y $x - 1$, es cero. Eso sólo es posible si alguna de las dos cantidades desconocidas es, precisamente, cero. Es decir,

$$(x + 6)(x - 1) = 0$$

implica que

$$x + 6 = 0 \qquad \text{o bien} \qquad x - 1 = 0$$

De esta manera, el problema de resolver una ecuación cuadrática se convierte en dos problemas más sencillos, resolver dos ecuaciones lineales que de inmediato dan

$$x_1 = 6 \qquad \text{o bien} \qquad x_2 = 1$$

De este modo, factorizar la ecuación permite resolverla; además, esta ecuación particular tiene dos soluciones, hay dos valores de la incógnita que la convierten en una igualdad verdadera: –6 y 1.

En general, el problema es factorizar expresiones como el miembro izquierdo de (a.4),

$$ax^2 + bx + c$$

El método recién descrito sólo es válido si el valor de $a$ es 1; si no es así, se pueden emplear diferentes técnicas para conseguirlo. Por ejemplo, considérese la ecuación

$$2x^2 + 6x - 20 = 0$$

Como $a$ vale 2, el método de factorización que se acaba de analizar no puede emplearse; sin embargo, se pueden dividir ambos miembros de la ecuación entre 2 (el valor de $a$), de modo que se tendrá

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

Y entonces este método de factorización será válido de nuevo.

# Fuentes consultadas


Educaplus.org: *Física: Movimientos* [en línea], <http://www.educaplus.org/cat-29-p1-Movimientos_Física.html>. [Consultado el 12 de enero de 2012].

Hewitt, P. (2004). *Física conceptual*. 9ª edición. México: Pearson Educación.

IES La Asunción: *Movimiento de un proyectil* [en línea], <http://www.ieslaasuncion.org/fisicaquimica/fislets/tiro_parabolico.html>. [Consultado el 12 de enero de 2012].

Librosvivos.net: *Proporcionalidad* [en línea], <http://www.librosvivos.net/smtc/homeTC.asp?TemaClave=1171>. [Consultado el 12 de enero de 2012].

Medellín, H. *Movimiento de proyectiles* [en línea], <http://galia.fc.uaslp.mx/~medellin/Applets/Tiro/Tiro.htm> . [Consultado el 12 de enero de 2012].

Red Escolar: *Las leyes del movimiento* [en línea], <http://redescolar.ilce.edu.mx/educontinua/conciencia/fisica/newton/nw3.htm>. [Consultado el 12 de enero de 2012].

Resnick, R. *et al*. (2000). *Física. Vol. 1*. 4a edición. México: Compañía Editorial Continental.

Vázquez, C. y L. Sánchez (2011). *Física I. Competencias básicas*. México: Edere-Esfinge.

Verdugo, H. *Movimiento rectilíneo uniforme* [en línea], <http://www.profisica.cl/images/stories/conceptos/mru.pdf>. [Consultado el 12 de enero de 2012].

——— *Movimiento variado* [en línea], <http://www.profisica.cl/images/stories/conceptos/mrua.pdf>. [Consultado el 12 de enero de 2012].